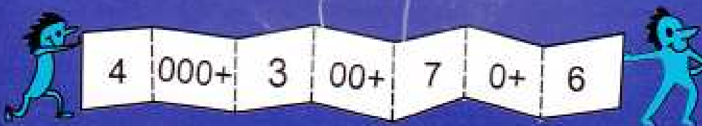
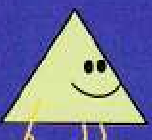


ग गणिताचा

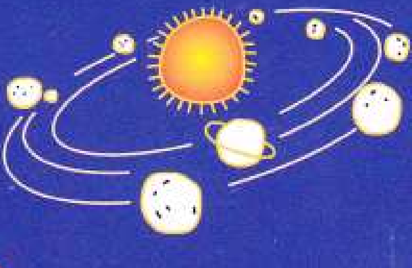
गणितातील गमती

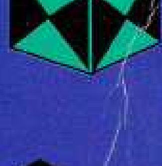


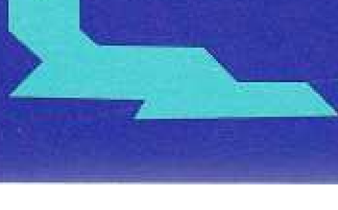
अरविंद गुप्ता

रेखाटने- रेश्मा बर्वे

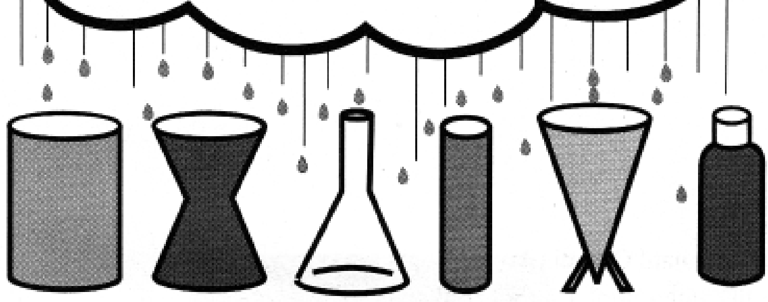
अनुवाद- सुजाता गोडबोले







ग गणिताचा
गणितातील गमती



अरविंद गुप्ता

रेखाटने- रेश्मा बर्वे

अनुवाद : सुजाता गोडबोले

मनोविकास
प्रकाशन

Ga Ganitacha - Ganitatil Gamati | Arvind Gupta
ग गणिताचा - गणितातील गमती । अरविंद गुप्ता
अनुवाद । सुजाता गोडबोले

प्रकाशक । अरविंद घन:श्याम पाटकर
मनोविकास प्रकाशन
फ्लॅट नं. ३ ए, ४ था मजला,
शक्ती टॉवर, ६७२, नारायण पेठ,
पुणे-४११ ०३०.
दूरध्वनी : ०२०-६५२६२९५०
Website : www.manovikasprakashan.com
Email : manovikaspublication@gmail.com

मुखपृष्ठ व रेखाटने । रेश्मा बर्वे
अक्षरजुळणी । विलास भोराडे, पुणे.
मुद्रक । श्री बालाजी एन्टरप्रायजेस, पुणे.
प्रथमावृत्ती । २० जून २०१४
ISBN - 978-93-83850-37-2
मूल्य । ८० रुपये

आशेचे बीज रोवण्यासाठी
डॉ. विनोद रैना
यांना समर्पित

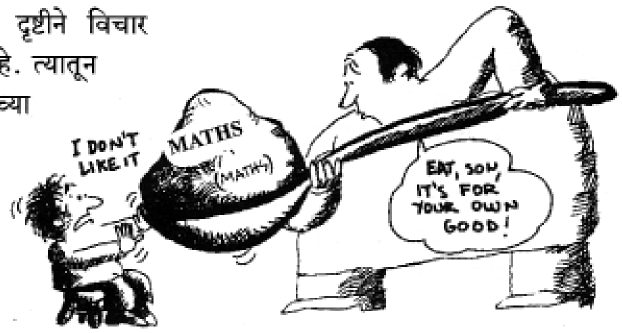
अनुक्रमणिका

मनोगत

आपल्या आजूबाजूच्या प्रश्नांचा गणिताच्या दृष्टीने विचार करणे, हा ते प्रश्न सोडविण्याचा एक मार्ग आहे. त्यातून आपल्याला कोणत्याही समस्येकडे परिमाणाच्या दृष्टीने पाहता येते :

''माझे पैसे मी बँकेतील मुदतीच्या ठेवीत ठेवावेत, की ठरावीक मुदतीच्या योजनेत गुंतवावेत, की शेअर बाजारात गुंतवावेत?''

''वर्तमानपत्रे टाकणाऱ्या मुलासाठी सर्वात चांगला आणि जवळचा मार्ग कोणता असेल?''



चित्र : 'डेंजर स्कूल' पुस्तकातून

परिमाणाच्या दृष्टीने विचार करण्याची आपल्याला पूर्वीपेक्षा आता अधिक गरज आहे. परंतु शाळेतील गणितात रोजच्या व्यवहारातील गणिताचा विचार क्वचितच केलेला दिसतो. गणिताच्या बहुतेक वर्गांत मुलांना काहीच मजा नसणारी कंटाळवाणी गणितेच सोडवावी लागतात. पुस्तकात दिलेली गणिते ते तितक्याच ठोकळेबाज पद्धतीने सोडवतात. त्यामुळे रोजच्या व्यवहारात गणिताचा कसा उपयोग होतो हे त्यांच्या कधी लक्षातच येत नाही.

गणित म्हणजे निव्वळ आकडेमोड, त्याने जणू वास्तवाशी फारकत घेतली आहे, म्हणून त्याचा प्रत्यक्षात काहीच उपयोग नाही. मग कितीतरी हुशार लोकांना वाटले, की गणित हा त्यांचा प्रांत नव्हे, तर त्यात आश्चर्य ते काय? शिंपी आणि भांडी बनवणारे तांबट यांसारख्या प्रत्यक्ष काम करणाऱ्या कसबी लोकांच्या कामातूनच सुरुवातीला गणिताची निर्मिती आणि प्रगती झाली हे आपण विसरूनच जात आहोत. गणिताच्या शब्दकोशात म्हणूनच या प्रत्यक्ष कामातील वापरात असणारे भूतकाळातील कितीतरी शब्द दिसतात. उदाहरणार्थ, 'स्ट्रेट लाइन' (सरळ रेषा) हा शब्द लॅटिनमधल्या 'स्ट्रेच्ड लिनन' (ताणलेले कापड) पासून आलेला आहे. एखाद्या शेतकऱ्याला बटाटे लावायचे असतील तर ते एका सरळ रेषेत येण्यासाठी तो एक दोरी ताणून बांधत असे. बांधकाम करताना सर्व विटा एका रेषेत याव्यात म्हणून गवंडी एक दोरीच तर वापरतो. अशा तऱ्हेने 'स्ट्रेच्ड लिनन'ची 'स्ट्रेट लाइन' (सरळ रेषा) झाली. 1 ते 10 हे आकडे, जे आपण सर्रास वापरतो, त्यांच्यासाठीचा इंग्रजी 'डिजिट' हा शब्द, लॅटिनमध्ये हाताच्या बोटांना डिजिट म्हणतात त्यावरून आला आहे– हाताची 10 बोटे म्हणजे 10 डिजिट्स!

आता खरोखर शाळेतील गणिताला त्याच्या फसव्या स्वरूपातून बाहेर काढून अधिक परिणामकारक आणि खऱ्या अर्थाने उपयुक्त बनवण्याची वेळ येऊन ठेपली आहे. अंकगणितातील गुंतागुंतीचे प्रश्न सोडविण्यासाठी संगणकाचा चांगला उपयोग होऊ शकतो. कॅलक्युलसच्या वर्गात अभियांत्रिकीच्या प्रत्यक्षातील समस्या सोडवून अधिक चांगले पूल आणि घरे बांधली जावीत. प्रत्यक्ष जीवनातल्या समस्यांचे प्रतिबिंब जर गणिते सोडवताना त्यात दिसले, तर मुलांना गणिताचा अभ्यास अधिक आकर्षक आणि अर्थपूर्ण वाटेल.

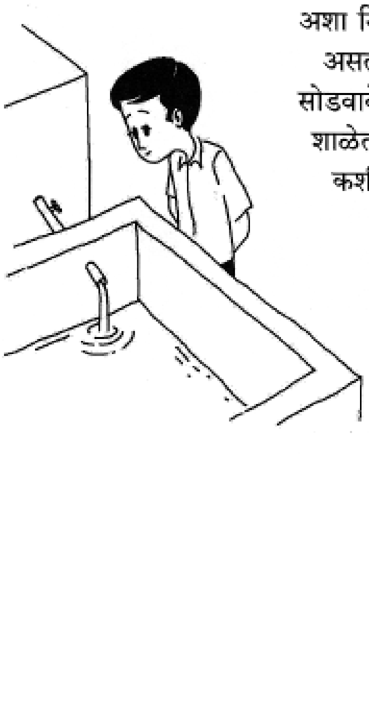
मुलांना अनेक प्रकारची कोडी आणि बुद्धीला चालना देणाऱ्या समस्या सोडवायला दिल्या पाहिजेत. थोडक्यात सांगायचे तर, गणित करताना मजा वाटायला हवी. वास्तवातील गोष्टींबरोबर त्यांना प्रयोग करता यायला हवेत. या पुस्तकात अशा काही गणिताच्या मजेशीर गोष्टी आणि उपक्रम देण्यात आले आहेत.

रोजच्या जीवनातील गणित

डॉ. अभय बंग हे एक प्रसिद्ध डॉक्टर आहेत. सार्वजनिक आरोग्य क्षेत्रातील क्रियाशील व्यक्ती या नात्याने भारतातील अनेक आदिवासी भागातील गरीब समाजात त्यांनी काम केले आहे. लहान असताना गांधीजींनी सुरू केलेल्या वर्ध्यातील 'नयी तालीम' (मूलभूत शिक्षण) या शाळेत त्यांचे शिक्षण झाले.

प्रत्यक्ष जीवनातील गणित ते कसे शिकले हे सांगताना डॉ. बंग म्हणतात की पुस्तकातील उदाहरणे न सोडवता शाळेतील गायींसाठी पाण्याचा हौद बांधण्याच्या प्रत्यक्ष अनुभवातून ते गणित शिकले.

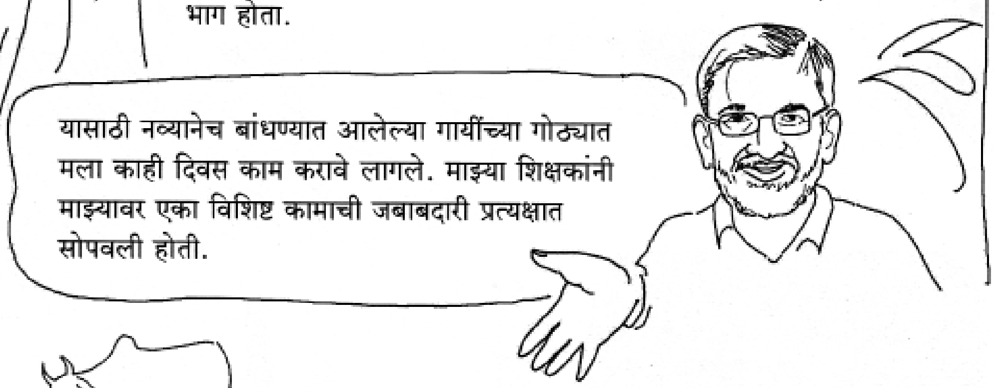
गणिताच्या पुस्तकातील एखादे नमुनेदार उदाहरण पुढीलप्रमाणे असेल : ''पाण्याच्या एका हौदाला दोन तोट्या आहेत. एका नळातून येणाऱ्या पाण्याने हौद भरतो आणि दुसऱ्या तोटीने तो रिकामा होतो. तर हौद भरायला किती वेळ लागेल? अशा निरर्थक प्रश्नांनी गणिताची पुस्तके भरलेली असतात. खालचा नळ बंद करून ते गणित सोडवावे हे कोणाही शहाण्या माणसाला सुचेल! शाळेत असताना मी आकारमान ही संकल्पना कशी शिकलो याचे एक उदाहरण देतो.''

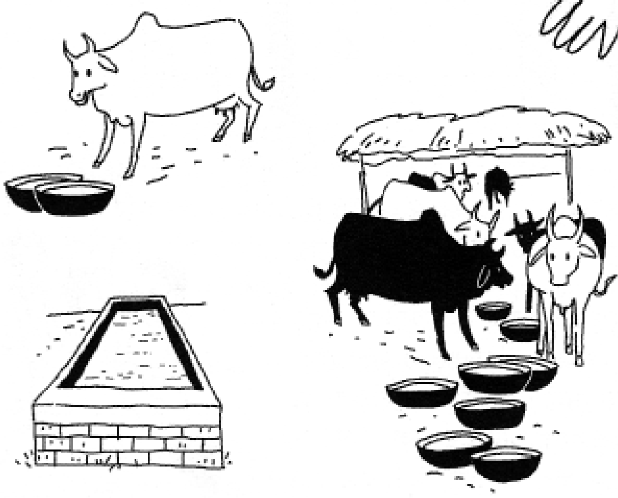


प्रत्यक्ष अनुभव आणि गणित यांचा काही संबंध आहे का, हा यातील कळीचा प्रश्न आहे.

आम्हाला दररोज तीन तास प्रत्यक्ष बांधकाम करावे लागत असे. 'उपजीविकेसाठी काम' (ब्रेड लेबर) या गांधीजींच्या तत्त्वज्ञानाचा हा एक भाग होता. मुले शेतात प्रत्यक्ष काम करून अन्नधान्य उत्पादन करत असत.

समाजोपयोगी वस्तूंची निर्मिती करण्यातून अनेक कौशल्ये हस्तगत करावीत, या विनोबा भाव्यांच्या दूरदृष्टीचाही हा एक भाग होता.





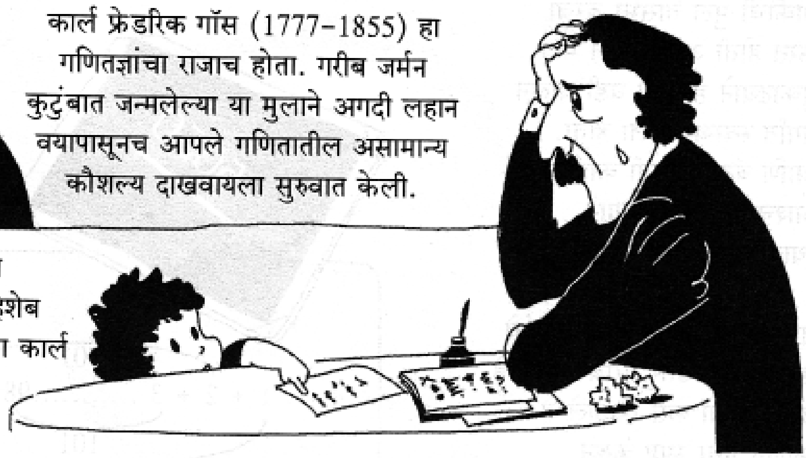
एक गाय एका दिवसात खरोखर किती पाणी पिते हे मला शोधायचे होते. म्हणजे गोठ्यातील सर्व गायींना मिळून किती पाणी लागेल? त्यानंतर सर्व गायींची तहान भागेल एवढे पाणी मावेल असा हौद बांधायचा होता.

असा हौद बांधण्यासाठी किती विटा लागतील याचा हिशेब मला करावा लागला. मग बाजारात जाऊन तेवढ्या विटा आणाव्या लागल्या. एक आठवडाभर मी या समस्येशी झुंजत होतो.

निरनिराळ्या आकाराचे अनेक हौद होते. त्यांचे आकारमान कसे मोजायचे? हौदाचा बाहेरील पृष्ठभाग आणि त्यांचे आकारमान यांचा एकमेकांशी काय संबंध होता? अखेर मी असा हौद प्रत्यक्षात बांधला आणि त्यातून खऱ्या जीवनाशी संबंध असलेले पुष्कळसे गणितही शिकलो.

1 ते 100 ची बेरीज करा

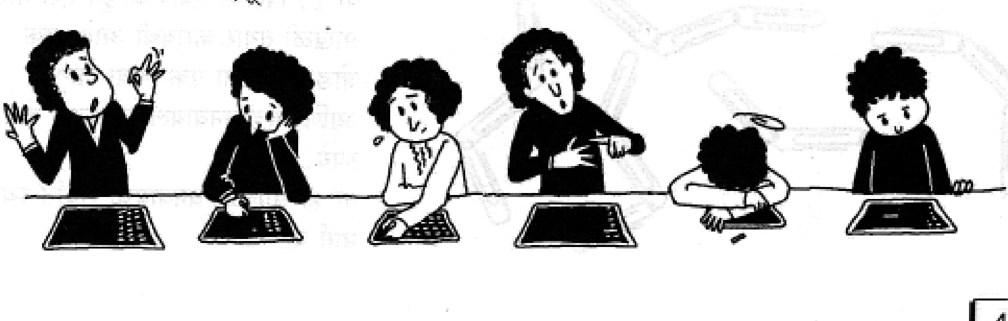
कार्ल फ्रेडरिक गॉस (1777–1855) हा गणितज्ञांचा राजाच होता. गरीब जर्मन कुटुंबात जन्मलेल्या या मुलाने अगदी लहान वयापासूनच आपले गणितातील असामान्य कौशल्य दाखवायला सुरुवात केली.



एके दिवशी त्याचे वडील कामगारांच्या पगाराचा हिशेब करत होते आणि लहानगा कार्ल ते पाहत बसला होता.

थोड्या वेळाने त्याने वडिलांना सांगितले, की त्यांचे उत्तर चुकीचे होते आणि तो हिशेब कसा करायला पाहिजे तेही त्यांना सांगितले. वडिलांनी सर्व हिशेब परत केला आणि कार्लचे म्हणणे बरोबर होते हे त्यांच्या लक्षात आले. कार्लला हिशेब करायला कोणीच शिकवले नव्हते. केवळ ऐकूनच तो हे शिकला होता.

कार्ल शाळेत असतानाची एक घटना खूपच प्रसिद्ध आहे. त्यावेळी तो दहा वर्षांचा होता. बट्नर गुरुजींनी वर्गातल्या सर्व मुलांना, 1 ते 100 आकडे लिहा आणि मग त्यांची बेरीज करा, असे सांगितले. मुलांनी आपल्या पाटीवर आकडे लिहिले आणि त्यांची बेरीज करायला सुरुवात केली. पहिल्या काही आकड्यांची बेरीज करणे सोपेच होते, कारण ते आकडे लहानच होते. पण दोन आकडी संख्या सुरू झाल्यानंतर मात्र आकडे मोठे होऊ लागले, तसा त्यांचा वेग मंदावला. बाकीची मुले बेरजा करण्यात गुंग असताना कार्ल मात्र नुसताच पाटीवरील आकड्यांकडे टक लावून पाहत बसला होता. आकड्यांकडे पाहता पाहता त्याला त्यात एक विशिष्ट रचना दिसू लागली.



एका क्षणात कार्लने त्याच्या पाटीवर उत्तर लिहिले 5050.

बाकीची मुले तासभर बेरजा करत होती आणि कार्ल मात्र मुकाट्याने हाताची घडी घालून वर्गात स्वस्थ बसला होता, आणि बट्नर गुरुजी काहीशा आश्चर्याने आणि रागाने त्याच्याकडे पाहत बसले.

तास संपला तेव्हा फक्त कार्लचे एकट्याचेच उत्तर बरोबर होते. हे उत्तर त्याला कसे मिळाले हे कार्लने नंतर स्पष्ट करून सांगितले.

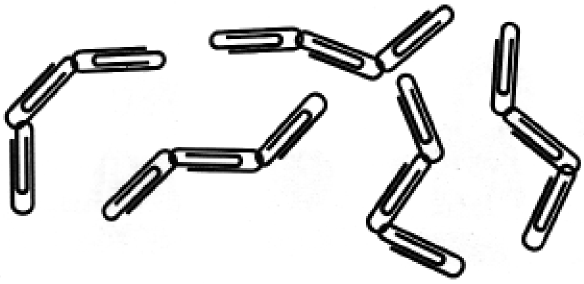
$$\overbrace{1 + 2 + \underbrace{3 \ldots\ldots\ldots 98}_{101} + 99 + 100}^{101}$$

$$101$$

मी प्रथम पहिल्या आणि शेवटच्या आकड्याकडे पाहिले. आणि त्यांची बेरीज होती : 1 + 100 = 101. मग मी दुसऱ्या आणि शेवटून दुसऱ्या आकड्याकडे पाहिले. त्यांची बेरीज-देखील होती (2+99 = 101.) 101. तिसऱ्या आणि शेवटून तिसऱ्या आकड्यांची बेरीजसुद्धा 101 च होती (3 + 98 =101). सर्वच आकड्यांच्या बाबतीत असेच होते हे माझ्या लक्षात आले. एकूण आकडे 100 होते म्हणजे त्यांच्या जोड्या होणार फक्त 50 आणि प्रत्येकाची बेरीज होती 101. मग मी 101 ला 50 ने गुणले आणि माझे उत्तर आले 5050.

एखादी रचना आढळली की गोष्टी खूपच सोप्या होतात.

यांची साखळी करा



या 15 क्लिप्स एकत्र जोडून एक मोठी साखळी तयार करायची आहे. एक जोड तोडायला एक रुपया लागतो आणि जोड बनवायला लागतात दोन रुपये.

तर ही साखळी बनवायचा सर्वात स्वस्त मार्ग कोणता?

लीलावती- गणितातील काव्य

भास्कराचार्यांनी (1114-1183) त्यांच्या 'लीलावती' या सुप्रसिद्ध ग्रंथात असा दावा केला आहे, की एखाद्या परिमाणाला शून्याने भागले असता जी अनंत संख्या मिळते, ती 'नवे जग निर्माण केले असता किंवा नष्ट केले असतादेखील बदलत नाही.'

बहुतेक वेळा गणित म्हणजे गुंतागुंतीचा, अमूर्त विचारांचा आणि रुक्ष विषय आहे म्हणून फारच थोड्या लोकांना त्यात स्वारस्य असू शकेल असेच मानले जाते. भारतीय गणितज्ञ भास्कराचार्य यांनी त्यांच्या लीलावती या ग्रंथाद्वारे वाचकांना आकर्षक वाटतील अशा रोजच्या जीवनातील गणिती समस्या काव्यात्मक पद्धतीने मांडून ते मत बदलले.

पुढील उदाहरण पाहा :

एकूण भुंग्यांच्या अर्ध्या संख्येच्या वर्गमुळाइतके भुंगे मालतीच्या झाडाकडे गेले, एकूण संख्येच्या आणखी आठ-नवमांश भुंगेही त्यांच्या पाठोपाठ गेले. एक भुंगा कमळात कोंडला गेला आणि त्याच्या मदतीसाठी त्याचा सोबती त्याच्याकडे गुणगुणत आला. आता मला सांगा, एकूण किती भुंगे होते?

बीजगणितातील वर्गसमीकरण वापरून याचे उत्तर काढता येते.
उत्तर आहे : एकूण 72 भुंगे होते.

त्यांची कन्या लीलावती हिला गणितात गोडी उत्पन्न व्हावी म्हणून भास्कराचार्यांनी ही गणिते तयार केली असे म्हणतात. भास्कराचार्यांनी लीलावतीच्या कुंडलीचा अभ्यास करून असे भाकीत केले होते, की एका विशिष्ट शुभमुहूर्तावर तिचा विवाह झाला नाही, तर तिच्या पतीचे विवाहानंतर लवकरच निधन होईल.

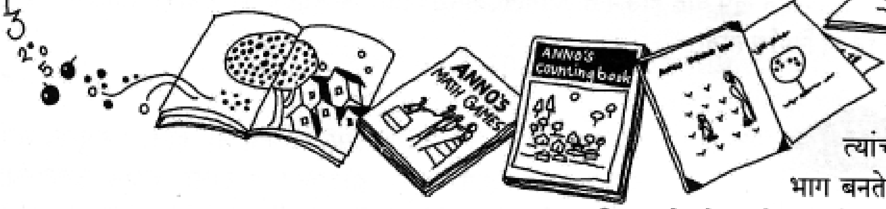
विवाहाची शुभघटिका समजावी म्हणून तळात एक छोटेसे भोक पाडलेली एक वाटी त्यांनी पाण्याने भरलेल्या घंघाळात सोडली होती. शुभघटिका सुरू होताना ती वाटी पाण्यात बुडणार होती. हे पाण्याचे घंघाळ त्यांनी एका खोलीत लपवून ठेवले होते आणि लीलावतीला त्याच्या जवळपासही न फिरकण्याची ताकीद दिली होती. लीलावतीच्या जिज्ञासेने अर्थातच तिला स्वस्थ बसू दिले नाही आणि घंघाळात सोडलेली वाटी पाहण्यासाठी ती त्या खोलीत गेली. वाटीकडे निरखून पाहत असताना, तिच्या नथीतला एक लहानसा मोती नेमका त्या वाटीत पडला आणि वाटी हिंदकळली. विवाह चुकीच्या मुहूर्तावर लागल्याने लीलावतीचा पती लवकरच निधन पावला.

आता हे आणखी एक गणित पाहा :

प्रेमालाप करताना एक मोत्यांची माळ तुटली.
माळेतील मोती विखुरले.
एक-षष्ठांश जमिनीवर पसरले.
एक-पंचमांश गादीवर पडले.
त्या तरुणीने एक-तृतीयांश मोती वेचले.
तिच्या प्रियकराने एक-दशांश मोती वेचले.
माळेच्या धाग्यात जर सहा मोती शिल्लक राहिले असतील,
तर माळेत एकूण किती मोती होते ?

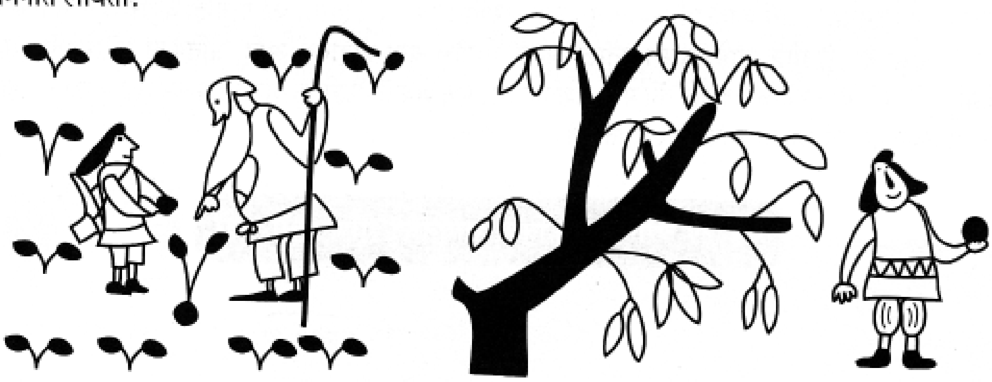
अन्नोच्या जादूच्या बिया

‘अन्नोच्या जादूच्या बिया’ हे एक वैशिष्ट्यपूर्ण पुस्तक आहे. गणिताच्या जादूवर आधारलेली ही एक खिळवून ठेवणारी गोष्ट आहे. सुप्रसिद्ध जपानी लेखक मित्सुमासा अन्नो (जन्म 1926) यांनी ती लिहिली आहे. त्यांच्या असामान्य पुस्तकांसाठी त्यांना 1984 साली मोठ्या प्रतिष्ठेचा ‘हॅन्स ख्रिश्चन अँडरसन’ पुरस्कार देण्यात आला.

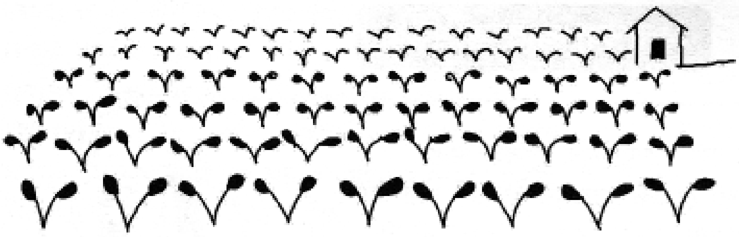


गुंतागुंतीचे गणित त्यांच्या कथेचाच एक भाग बनते. कधी कधी तर, गणितामुळे गोष्ट पुढे सरकते आहे, की गोष्टीमुळे गणिताची प्रगती होत आहे, हेच समजत नाही.

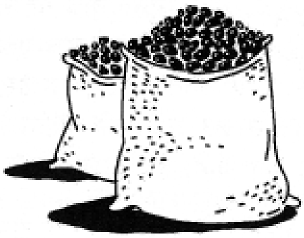
जॅक हा एक आळशी उनाड मुलगा आहे. एके दिवशी त्याला एक हुशार म्हातारा भेटतो. तो म्हातारा जॅकला दोन जादूच्या सोनेरी बिया देतो आणि तिथूनच या जादूची सुरुवात होते. जॅक त्यातली एक बी खातो आणि आश्चर्य म्हणजे त्या जादूने त्याला सबंध वर्षभर भूकच लागत नाही. म्हाताऱ्या जादूगाराने सांगितल्याप्रमाणे तो दुसरी बी जमिनीत पुरतो आणि त्या झाडाला दोन बिया येतात. एक बी खाल्ली की जॅकचे पोट वर्षभर भरते आणि दुसरी बी तो जमिनीत पुरतो. प्रत्येक झाडाला दरवर्षी दोन बिया येतात. म्हणून दरवर्षी जॅक एक बी खातो आणि एक बी जमिनीत लावतो.



अनेक वर्षे अशीच निघून जातात. पण एका वर्षी जॅक दुसरीकडे अन्न शोधायचे ठरवतो आणि दोन्ही बिया जमिनीत लावतो. पुढल्या वर्षी त्याला चार बिया मिळतात. मग तो एक बी खातो आणि तीन बिया जमिनीत लावतो. पुढच्या वर्षी त्याला सहा बिया मिळतात. त्यातली एक तो खातो आणि पाच बिया पुरतो. अशा तऱ्हेने त्याचा बियांचा साठा वाढतो आणि तो श्रीमंत होतो.



कालांतराने जॅकचे लग्न होते आणि त्यांना एक मूल होते. तो आपल्या कुटुंबाच्या पोषणाची जबाबदारी तर घेतोच; आणि त्याच्या संपत्तीत खूप वाढ होऊन तो चांगला श्रीमंत होतो. त्यानंतर एकदा महापूर येतो आणि सर्व काही नष्ट होण्याचा धोका निर्माण होतो.



या नैसर्गिक आपत्तीत जॅकची सर्व संपत्ती नष्ट होते. महापुरात सर्व काही वाहून जाते. एका झाडाच्या फांदीला बांधून ठेवलेल्या थोड्याशाच जादूच्या बिया तेवढ्या शिल्लक राहतात. जॅक, त्याची बायको आणि मूल, त्यांना वाचवल्याबद्दल देवाचे आभार मानतात आणि सर्व काही परत सुरू करतात.

ही केवळ करमणूक करणारी गणिताची गोष्ट नाही, तर तिचे अनेक स्तर आहेत. यात एक खोल संदेश दडलेला आहे. खुशालचेंडू जॅक आपला आळस झटकून कामाला कसा लागतो ते आपल्या चित्रावरून समजते. जॅक हुशार कसा बनला (किंवा हिशेब करायला कसा शिकला) हे विचारी वाचकाच्या लक्षात येईल. आणि शेवटी, शहाणा झालेला जॅक न डगमगता सर्व काही पहिल्यापासून सुरू करण्याइतका धीट होतो. कोणत्याही वयाच्या वाचकासाठी ही एक दिलासा देणारी गोष्ट आहे. वास्तवातील अनेक गोष्टींचे यात प्रतिबिंब आहे. प्रतिकूल परिस्थिती आणि गरिबीनंतर श्रीमंती येते. नशीब बदलले की मोठे यश मिळते. पण शेवटी नैसर्गिक आपत्ती येऊन सर्व काही नष्ट होऊ शकते, यावरून नम्रतेचे महत्त्व आपल्या लक्षात येते.

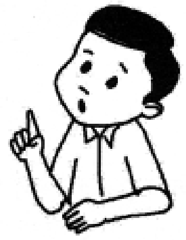
पृष्ठ 29 वरील सांकेतिक भाषेतील गणितांची उत्तरे

1. S = 1, O = 7, I = 3, L = 4, B = 6, Y = 2.
2. S = 3, L = 0, Y = 6, R = 5, I = 9, G = 1.
3. C = 1, R = 4, A = 9, B = 5, S = 0.
4. M = 4, E = 6, A = 2, L = 1, S = 5.
5. T = 9, E = 0, P = 1, I = 5, L = 7.
6. P = 8, E = 1, N = 3, R = 6.
7. D = 8, O = 4, G = 9, F = 1, A = 0, N = 2, S = 7.
8. H = 9, O = 3, T = 2.
9. L = 6, U = 7, S = 1, H = 9, E = 0, R = 5.
10. S = 5, P = 9, I = 4, T = 6.
11. T = 2, A = 5, P = 8, E = 6.
12. S = 9, E = 5, N = 6, D = 7, M = 1, O = 0, R = 8, Y = 2.
13. W = 0, I = 6, N = 2, L = 5, A = 7, S = 8, T = 9.
14. A = 4, H = 6, O = 2, G = 5, T = 1, I = 0, E = 7.
15. O = 6, N = 9, E = 3, R = 8, Z = 1.
16. T=7, H=5, I=3, S=0, V=1, E=9, R=4, Y=2, A=5.
17. C=9, R=6, O=2, S=3, A=5, D=1, N=8, G=7, E=4.
18. M=1, E=3, T=7, R=4, L=6, I=9, G=5, A=7, S=2, C=8.
19. J=8, U=4, N=3, E=2, L=7, Y=5, A=1, P=6, R=9, I=0.
20. तुम्हीच शोधा!

रामानुजन- अलौकिक गणितज्ञ

श्रीनिवास रामानुजन यांचा जन्म 22 डिसेंबर 1887 रोजी भारतातील तामिळनाडू राज्यातील एरोडे येथे झाला. त्यांचे वडील एका साड्यांच्या दुकानात कारकुनाची नोकरी करत असत. त्यांना गणितात अलौकिक बुद्धिमत्ता होती आणि ते त्यांच्या लहानपणापासूनच दिसून येत होते. ते नेहमी प्रश्न विचारत असत- बरेचदा ते विलक्षण असत. उदाहरणार्थ, वाफेवर चालणाऱ्या आगगाडीला मित्र (अल्फा सेंटॉरी) या आपल्या सर्वात जवळच्या ताऱ्यापर्यंत पोहोचायला किती वेळ लागेल? त्यांच्या शिक्षकांना ते अर्थातच आवडत नसे.

एके दिवशी वर्गात भागाकार शिकवताना शिक्षकांनी सांगितले की, ''कोणत्याही आकड्याला जर त्याच आकड्याने भागले तर उत्तर येईल 1.'' रामानुजनने विचारले, ''शून्याला शून्याने भागले तरीदेखील त्याचे उत्तर 1 असेच येईल का?''



रामानुजन यांची गणितातील अलौकिक बुद्धिमत्ता ही उपजतच होती. त्यांना गणिताचे फारसे औपचारिक शिक्षण नव्हते. तरीही आकड्यांच्या जगातील त्यांचे शोध हे मौल्यवान रत्नांप्रमाणेच होते. पौल एर्डोस यांनी जी. एच. हार्डींना विचारले, की त्यांच्या मते त्यांचे गणितातील सर्वात महत्त्वाचे योगदान कोणते? हार्डींनी ताबडतोब उत्तर दिले की 'रामानुजनना शोधणे हे त्यांचे सर्वात महत्त्वाचे योगदान होते.' हार्डी नास्तिक होते आणि प्रत्येक गोष्टीसाठी त्यांना भक्कम पुरावा लागे. बऱ्याच वेळा रामानुजन केवळ त्यांच्या अंत:प्रेरणेतून असे पुरावे लिहून काढत असत.

रामानुजन यांना 1916 साली केंब्रिज विद्यापीठाने बॅचलर ऑफ सायन्स पदवी दिली आणि 1919 साली ते रॉयल सोसायटीचे फेलो झाले. पूर्णपणे शाकाहारी असल्याने ते आपला स्वयंपाक स्वत:च करत असत. बहुधा अति कामाच्या तणावाने आणि चांगल्या पोषक आहाराच्या अभावामुळे इंग्लंडमध्ये असताना त्यांना क्षयरोग झाला आणि उपचारगृहात दाखल व्हावे लागले.

-डी. डी. कोसांबी
(भारतातील प्रसिद्ध गणितज्ज्ञ)

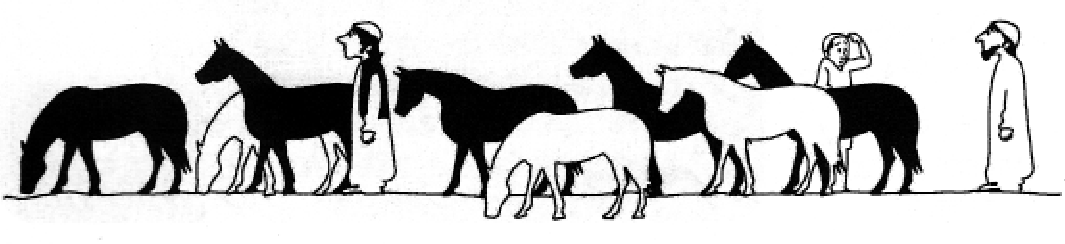
''भास्कराचार्यांनंतरच्या आठशे वर्षांत आपल्या देशाने फक्त एकच गणितज्ञ जगाला दिला आहे. ते म्हणजे रामानुजन आणि त्यांना महाविद्यालयाच्या पहिल्या वर्षाची परीक्षादेखील पास होता आली नव्हती. भारताने त्यांना जन्म दिला त्याबरोबरच उपासमार, क्षयरोग आणि अकाली मृत्यूदेखील दिला. ते जरी जन्माने भारतीय असले, तरी त्यांच्यातील गुण हेरून त्यांना इंग्लंडला नेऊन, त्यांचे प्रशिक्षण करून त्यांच्यातील असामान्य गुणांना पैलू पाडण्याचे श्रेय इंग्लंडमधील गणितज्ञ हार्डी यांच्याकडेच जाते.''

एकदा हार्डी रामानुजन यांना उपचारगृहात भेटण्यास गेले असताना सहज म्हणाले की, ‘‘माझ्या टॅक्सीचा क्रमांक होता 1729, त्यात काहीच वैशिष्ट्यपूर्ण नव्हते.’’

मोलाक्काचा घोडा

एका आटपात नगरात एक व्यापारी राहत होता. त्याला तीन मुले होती. त्यांच्यापैकी कोणालाच व्यापारात स्वारस्य नव्हते. सर्व व्यवहार त्यांचा दिवाणजीच पाहत असे. अचानक एकदा व्यापारी आजारी पडला. मृत्यूपूर्वी त्याने त्याचे इच्छापत्र तयार केले. त्यात त्याने लिहिले, की त्याची अर्धी संपत्ती त्याच्या सर्वात मोठ्या मुलाला मिळावी. राहिलेल्यापैकी अर्धी दुसऱ्या मुलाकडे जावी आणि उरलेल्या संपत्तीतील अर्धी तिसऱ्याला मिळावी. व्यापाऱ्याच्या मृत्यूनंतर मुलांच्या लक्षात आले, की वडिलांकडे फक्त सातच घोडे होते. इच्छापत्राप्रमाणे संपत्तीची वाटणी करायची म्हणजे घोडे कापावे लागतील. यामुळे ते चांगलेच गोंधळून गेले.

मोलाक्का नावाचा चतुर, समंजस माणूस त्यांच्या मदतीला आला. त्याने प्रथम त्याचा घोडा या मुलांना भेट म्हणून दिला. आता वाटणी करण्यासाठी आठ घोडे झाले. इच्छापत्रात लिहिल्याप्रमाणे पहिल्या मुलाला एकूणातील अर्धे, म्हणजे चार घोडे मिळाले. राहिलेल्या चार घोड्यांपैकी अर्धे म्हणजे दोन घोडे दुसऱ्या मुलाला मिळाले. उरलेल्या दोन घोड्यांच्या अर्धे म्हणजे एक घोडा तिसऱ्या मुलाला मिळाला. तिघांना मिळून 4 + 2 + 1 = 7 घोडे मिळाले. मोलाक्का आपल्या घोड्यावर बसून घरी निघून गेला.



काप्रेकरांचा स्थिरांक-6174

दत्तात्रय रामचंद्र काप्रेकर (1905-1986) या भारतीय गणितज्ञांनी आकड्यांच्या सिद्धांतात एका विशिष्ट प्रकारचे आकडे आणि त्यांच्या नावाने ओळखली जाणारी एक स्थिर संख्या यांसारखे अनेक महत्त्वपूर्ण शोध लावले. काप्रेकरांनी औपचारिकरित्या पदव्युत्तर शिक्षण घेतले नव्हते आणि महाराष्ट्रातील नाशिक शहरात 1930 ते 1962 या संपूर्ण कार्यकाळात शाळेत शिक्षक म्हणून काम केले.

पुनरावर्ती अपूर्णांक/दशांश, जादूचे चौरस आणि विशेष गुणधर्म असणारे पूर्णांक यांच्यासंबंधी त्यांनी केलेले विस्तृत लिखाण प्रकाशित झाले आहे. लवकरच गणिताच्या गमतीजमतीत स्वारस्य असणाऱ्या गटांमध्ये ते तज्ज्ञ म्हणून ओळखले जाऊ लागले. एकट्यानेच केलेल्या संशोधनातून त्यांनी अनेक संख्याविषयक शोध लावले आणि अनेक संख्यांचे विशेष गुणधर्म दाखवून दिले. सुरुवातीला भारतातील गणितज्ञांनी त्यांच्या शोधांची गांभीर्याने दखल घेतली नाही. त्यांचे शोध निम्नस्तरावरील गणिताच्या नियतकालिकांत किंवा खाजगीरित्याच प्रकाशित करण्यात येत होते.

'सायंटिफिक अमेरिकन' या नियतकालिकातील 'गणिती खेळ' या आपल्या सदरात मार्टिन गार्डनर यांनी मार्च 1975 मध्ये काप्रेकरांबाबत लिहिल्यावर त्यांना आंतरराष्ट्रीय प्रसिद्धी मिळाली. आता त्यांचे नाव सुप्रसिद्ध असून इतर अनेक गणितज्ञांनी त्यांचे कार्य पुढे चालू ठेवले आहे. 1949 मध्ये त्यांनी 'काप्रेकरांचा स्थिरांक-6174'चा शोध लावला.

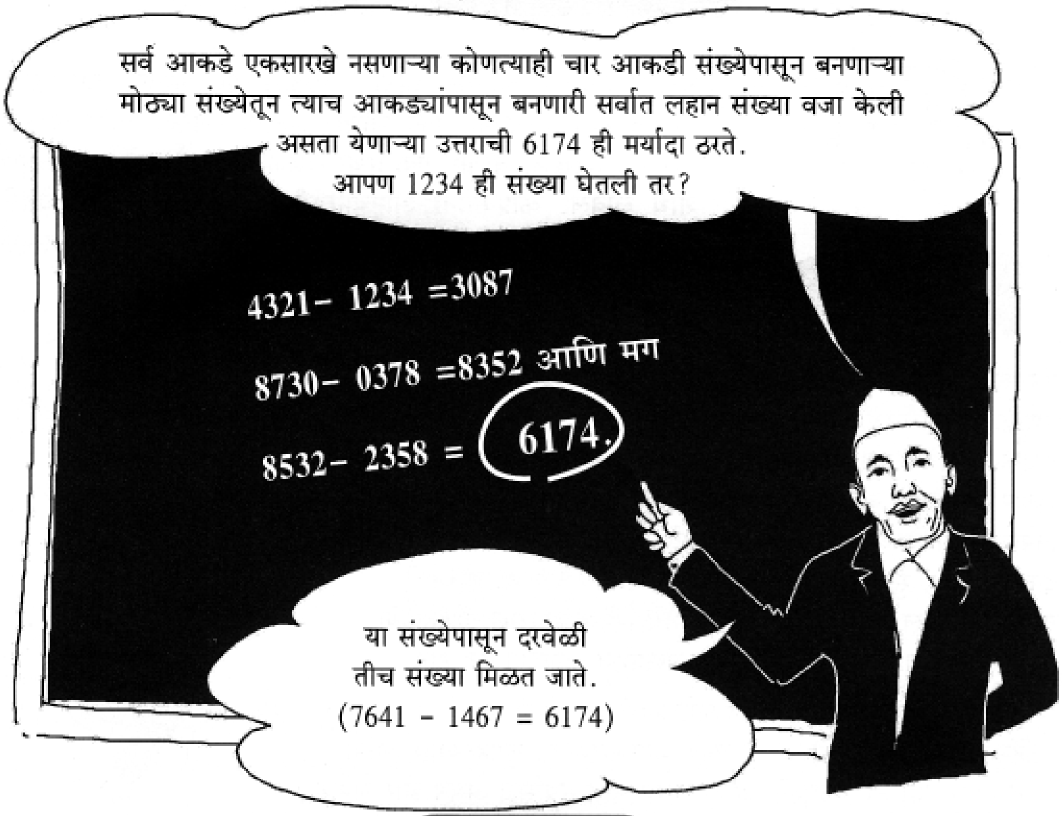
प्रथम एक अशी चार आकडी संख्या निवडा, की त्यातील आकडे एकसारखे नसतील (म्हणजे 1111 किंवा 2222 नसतील अशी). मग त्या आकड्यांपासून मिळणारी सर्वात लहान संख्या आणि सर्वात मोठी संख्या अशी त्यांची मांडणी करा आणि मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करा. त्याचे जे उत्तर येईल ती संख्या घेऊन परत हीच कृती करा. आणि असे परत परत करत राहा.

उदाहरणार्थ, आपण 2013 ही संख्या घेऊया. यातील मोठी संख्या होईल 3210 आणि लहान संख्या होईल 0123.

$$3210 - 0123 = 3087$$
$$8730 - 0378 = 8352$$
$$8532 - 2358 = 6174$$
$$7641 - 1467 = 6174$$

आपण एकदा 6174 या आकड्यापाशी पोहोचलो, की हीच क्रिया परत परत होत राहते आणि दरवेळी उत्तर 6174 असेच येते. म्हणून 6174 या आकड्याला आपण गाभा (केर्नेल) म्हणतो. म्हणजे 6174 हा काप्रेकरांच्या क्रियेचा गाभा आहे, आणि एवढेच त्याचे वैशिष्ट्य आहे.

6174 ही स्थिर संख्या काप्रेकरांनी 1949 साली शोधली आणि तिला त्यांचेच नाव देण्यात आले आहे.



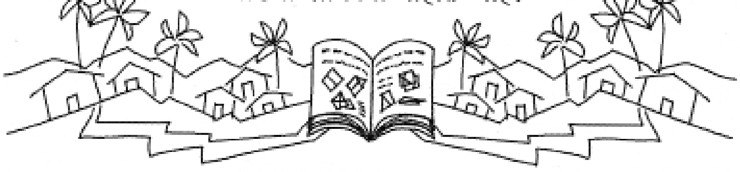
सूचना पाळणे

तंतोतंत पाळता येतील अशा अचूक सूचना तुम्ही चांगल्या प्रकारे देऊ शकता का? मध्यभागी एक पडदा लावलेल्या टेबलाच्या दोन बाजूंना दोन खेळाडू बसतात. दोघांकडे त्याच वस्तू आहेत. त्यातील मुलगी तिच्याकडच्या वस्तू एका विशिष्ट क्रमाने एका पद्धतीने मांडते. ती काय करत आहे हे ती आपल्या भिडूला सांगते.

त्याला ती दिसत नाही, पण ती सांगेल त्याप्रमाणेच करत राहून त्याला तिच्यासारखीच मांडणी करायची आहे. हे बहुतेक वेळा वाटते तितके सोपे नसते. यात केवढा गोंधळ होतो हे पाहून तुम्हाला आश्चर्य वाटेल!

कागदांच्या घड्या घालण्यातून भूमितीचा अभ्यास

भारताने जगाला शून्य या संकल्पनेची भेट दिली हे तर प्रसिद्धच आहे. पण ओरिगामी म्हणजे कागदांच्या घड्या घालून त्यातून भूमिती शिकण्याचे पहिले पुस्तक तंडलम सुंदर राव या भारतीयाने लिहिले हे फारच थोड्या लोकांना माहीत आहे.



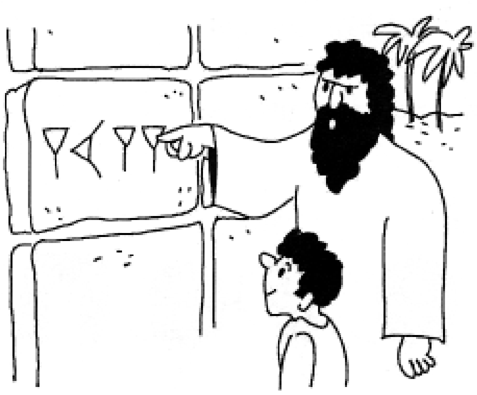
'सम जिओमेट्रिक एक्झरसाइज इन पेपरफोल्डिंग' हे पुस्तक 1893 साली ॲडिसन आणि कंपनी, माउंट रोड, मद्रास (आताचे चेन्नई) यांनी प्रथम प्रकाशित केले.

त्या काळी ब्रिटिशांचे राज्य असल्याने टी. सुंदर राव यांचे इंग्रजीकरणाने रौ (Row) असे नाव करण्यात आले यात फारसे आश्चर्य वाटण्याचे कारण नाही. या अलौकिक बुद्धिमत्तेच्या गृहस्थाने बी.ए. ही पदवी मिळवली होती व ते तामिळनाडूत कोठेतरी उपजिल्हाधिकारी होते. त्यांच्याबाबत याहून अधिक माहिती उपलब्ध नाही.

चिन्हे व स्थान

सुमारे 5000 वर्षांपूर्वी बॅबिलोनिया- म्हणजे आजचे इराक- मधील लोक 60 च्या परिमाणात मोजत असत. 1 ते 59 या आकड्यांसाठी ते निरनिराळी चिन्हे वापरत असत आणि शून्यासाठी एक स्थान रिकामे सोडत असत. संख्या जर खूप मोठी असेल, तर प्रत्येक चिन्हाच्या स्थानाने 60 चा गट दर्शवला जात असे, किंवा 60×60, वगैरे वगैरे...

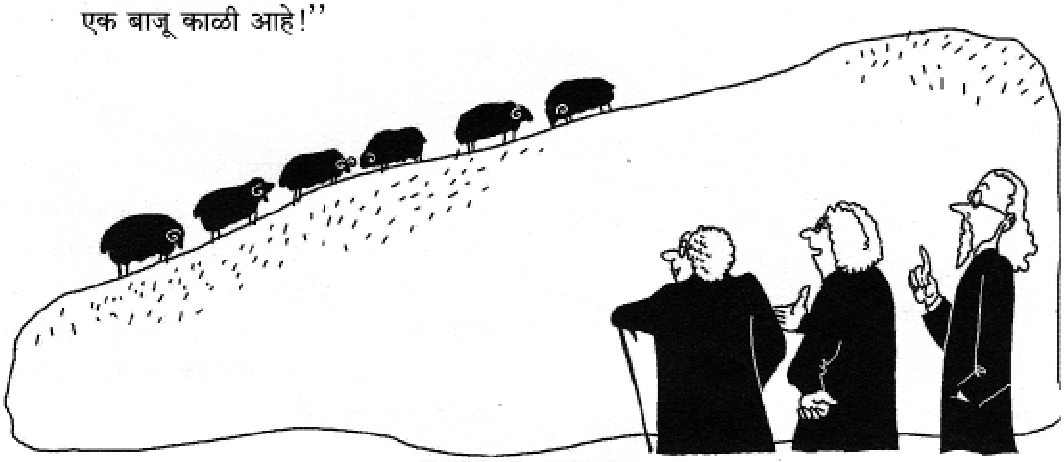
चित्रातील चिन्हात 72 दर्शवले आहे. पहिले चिन्ह 60 चा एक गट दर्शवते. नंतरच्या तीन चिन्हांद्वारे 12 ही संख्या दर्शवली आहे. आपण एक तास 60 मिनिटांत विभागतो आणि एक मिनिट 60 सेकंदात, यात याच प्रकारच्या मोजण्याच्या पद्धतीचा वापर केला आहे.



गणिताची अचूकता

आयन स्टुअर्ट यांनी सांगितलेल्या या गोष्टीवरून गणिताची अचूकता कशी असते हे लक्षात येईल. एक खगोलशास्त्रज्ञ, एक पदार्थविज्ञानशास्त्रज्ञ आणि एक गणितज्ञ एकदा स्कॉटलंडमध्ये सुट्टीसाठी गेले होते. आगगाडीच्या खिडकीतून पाहताना त्यांना एका शेतात एक काळ्या रंगाची मेंढी दिसली.

‘‘हे विलक्षण आहे,’’ खगोलशास्त्रज्ञ म्हणाले, ‘‘स्कॉटलंडमधल्या सगळ्या मेंढ्या काळ्या दिसतात!’’ यावर पदार्थविज्ञानशास्त्रज्ञ म्हणाले, ‘‘नाही, नाही, तसे नाही. स्कॉटलंडमधील काही मेंढ्या काळ्या आहेत.’’ गणितज्ञाने प्रथम आकाशाकडे डोळे लावले आणि मग ते उत्तरले, ‘‘स्कॉटलंडमध्ये एक तरी शेत असे आहे, की त्यात एक मेंढी आहे आणि तिची एक बाजू काळी आहे!’’

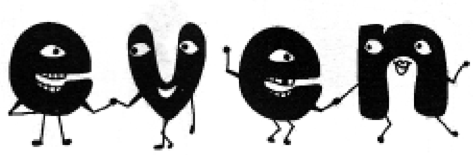


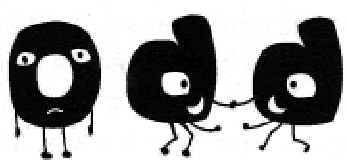
सम आणि विषम

तुम्ही जर सम आकडा असाल
तर तुमची नेहमी जोडी असते
तुम्ही जर शोधलेत
तर तुमचा सोबती सापडेलच.

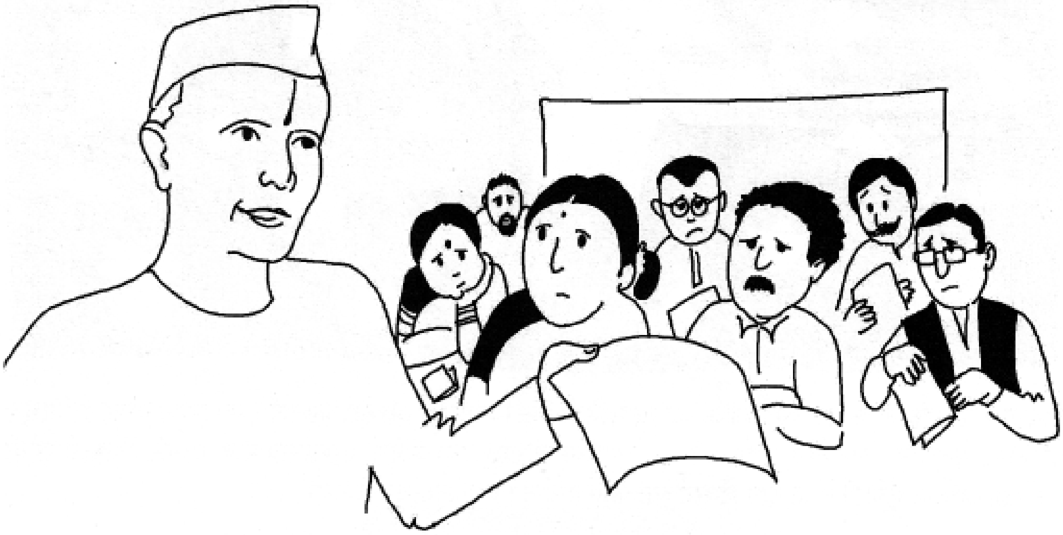
पण तुम्ही जर विषम क्रमांक असाल
तर कोणीतरी एक एकटा असणारच
आपला सोबती जरी शोधला
तरी तो नेहमी एकटाच राहील.

--मार्ग वॉड्सवर्थ





गणिताचे प्रचारक - पी. के. श्रीनिवासन

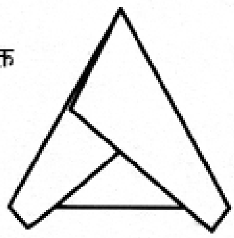


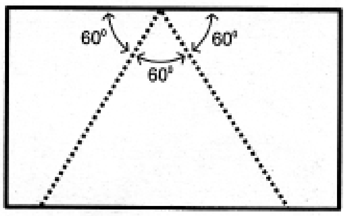
'सम जिओमेट्रिक एक्सरसाइजेस इन पेपर फोल्डिंग' (कागदांच्या घड्यांतून भूमितीचा अभ्यास) या टी. सुंदर राव यांच्या महान पुस्तकाबद्दल मी पी. के. श्रीनिवासन (पीकेएस) (1924–2005) यांच्याकडून प्रथम ऐकले. निरनिराळ्या उपक्रमांतून गणित शिकवण्याच्या पद्धतीचा त्यांनी भारतभर प्रचार आणि प्रसार केला.

गणित हाच त्यांचा श्वास होता. त्यांना स्वप्ने पडत तीदेखील गणिताची. त्याहून महत्त्वाचे म्हणजे, जे कोणी त्यांच्या संपर्कात येतील, त्या सर्वांना त्यांच्या गणितप्रेमाची आणि उत्साहाची लागण होत असे. पुडुचेरीच्या श्री अरोविंदो आश्रमाने आयोजित केलेल्या एका कार्यशाळेत मी 1986 साली त्यांना प्रथम भेटलो.

फोटोकॉपी (झेरॉक्स) सुरू होण्याच्या पूर्वीचे ते दिवस होते. म्हणून पी.के.एस. यांनी सायक्लोस्टाइल करण्याच्या कागदाचा एक मोठा गठ्ठा, कात्र्या, डिंक, जुनी वर्तमानपत्रे आणि एक स्टेप्लर मागवला. प्रत्येक शिक्षकाला एक कागद देण्यात आला आणि त्यांना 60 अंशाच्या कोनात घडी घालायला सांगण्यात आले.

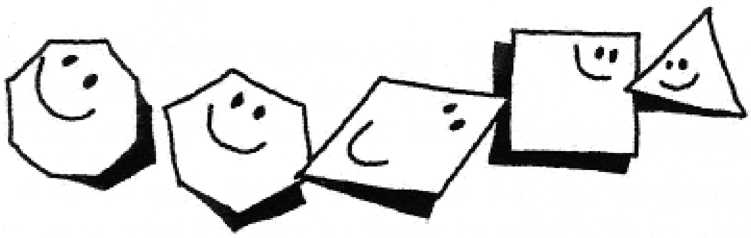
सर्व शिक्षक चांगलेच गोंधळून गेले! त्यांना फक्त कोनमापक घेऊन कागदावर पेन्सिलीने कोन काढण्याचीच सवय होती. त्याशिवाय इतर कोणतीच पद्धत त्यांना माहीत नव्हती. सर्वांनी हार मानली.





मग पी.के.एस. यांनी कागदाच्या सरळ बाजूची (180 अंश) तीन सारख्या भागात घडी घातली आणि 60 अंशाचा कोन अचूक दाखवला! शिक्षक आश्चर्यचकित झाले. हा एक नवाच शोध होता– आणि तोदेखील सुबक आणि सुंदर!

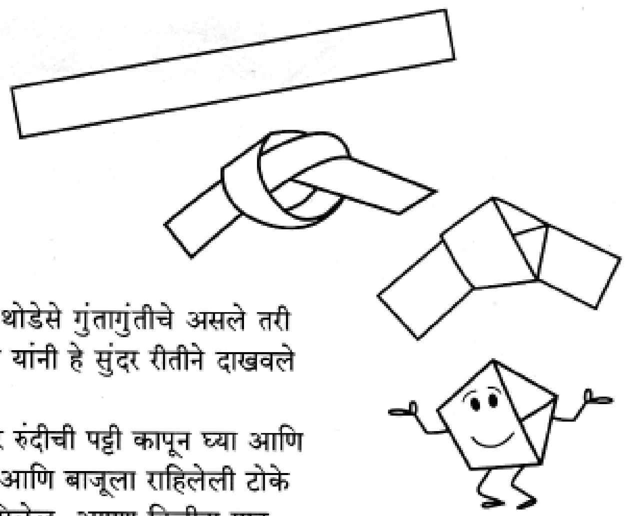
दिवसभर शिक्षकांनी कागदांच्या घड्या घालून भूमितीतील निरनिराळे आकार बनवले – काटकोन नसणारे समभुज चौकोन, षटकोन, अष्टकोन वगैरे वगैरे... त्यांच्या बी.एड्.च्या संपूर्ण अभ्यासक्रमात त्यांनी शिकली होती त्यापेक्षा अधिक भूमिती ते या दोन दिवसांच्या कार्यशाळेत प्रात्यक्षिकांतून शिकले.



सर्व विषयांचा राजा असणाऱ्या गणित या सर्वात सुंदर विषयाबाबत मुलांना स्वारस्य आणि प्रेम वाटावे म्हणून त्यांनी जेवढे कार्य केले तेवढे इतर कोणी क्वचितच केले असेल. ते ओरडले, चिडले, प्रसंगी रडलेदेखील आणि गणित आपल्याभोवती कायमच असते हे लोकांना पटवून देण्याचा त्यांनी आटोकाट प्रयत्न केला. जेव्हा त्यांचे म्हणणे कोणीच ऐकून घेतले नाही, तेव्हा त्यांनी 'हिंदू' या वृत्तपत्रात जे 60 लेख लिहिले ते अभिजात गणले जातात. नाण्यांमध्ये, झाडूच्या काड्यांमध्ये, काड्यापेटीच्या काड्यांत, चौकोनी कागदात, बसच्या तिकिटात, रोजच्या दिनदर्शिकेत आणि आपल्या आजूबाजूच्या सर्वच गोष्टींमध्ये गणित कसे दडलेले आहे हे त्यांनी दाखवून दिले. हे लेख एकत्र करून एनसीइआरटीने (नॅशनल कौन्सिल ऑफ एज्युकेशनल रिसर्च अँड ट्रेनिंग) गणिताच्या उपक्रमांसाठीचे बीजसाहित्य म्हणून पुस्तकरूपात प्रसिद्ध केले आहेत.

नंबर फन विथ अ कॅलेंडर (दिनदर्शिकेतील आकड्यांच्या गमती) आणि रॉम्पिंग इन नंबरलँड (आकड्यांच्या प्रदेशातील भ्रमंती) या त्यांच्या इतर पुस्तकांचे अनेक भारतीय भाषांत अनुवाद प्रसिद्ध झाले आहेत.

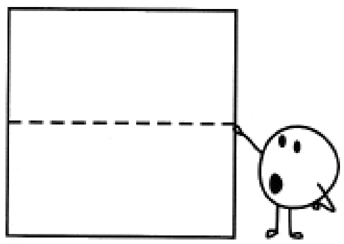
पंचकोनी घडी



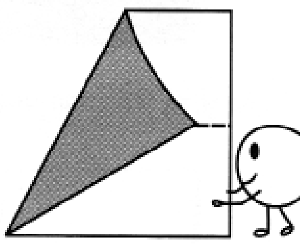
घडी घालून पंचकोन बनवता येईल का? हे थोडेसे गुंतागुंतीचे असले तरी तसे सोपेच आहे. 1893 मध्ये टी. सुंदर राव यांनी हे सुंदर रीतीने दाखवले होते. कसे?

ए/4 आकाराच्या कागदाची एक 3 सेंटीमीटर रुंदीची पट्टी कापून घ्या आणि त्याची साधी गाठ मारा. ही गाठ सपाट करा आणि बाजूला राहिलेली टोके कापून टाका म्हणजे तुम्हाला एक पंचकोन मिळेल. आपण कितीदा गाठ मारली आहे, पण हे आपल्या कधी लक्षातच आले नाही!

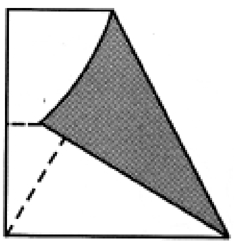
घडीचा समभुज त्रिकोण



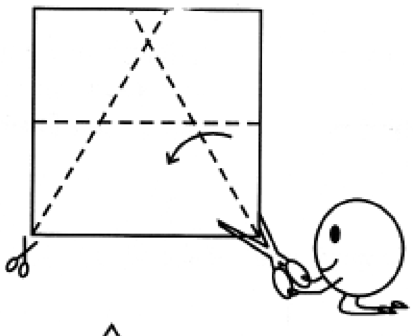
एका चौकोनी कागदाच्या मध्यात घडी घाला.

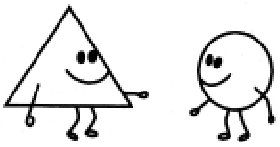


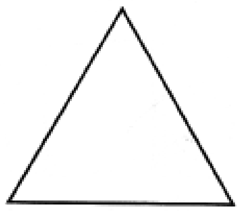
वरचे डावीकडचे टोक मध्याच्या रेषेवर अशा तऱ्हेने आणा, की डाव्या बाजूचे खालचे टोक डावीकडच्या कोपऱ्यातून दुमडले जाईल.



वरच्या उजव्या कोपऱ्याने परत तसेच करा.

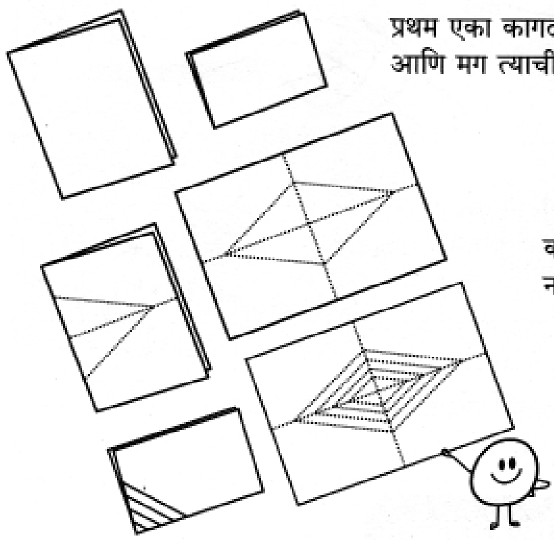




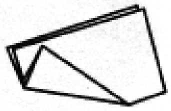


तुटक रेषेने दाखवलेला मोठा त्रिकोण कात्रीने कापा. हा झाला तुमचा सुबक समभुज त्रिकोण!

चौकटच्या पत्त्याच्या आकाराची घडी



प्रथम एका कागदाची अर्धी घडी करा
आणि मग त्याची एक-चतुर्थांश घडी करा.

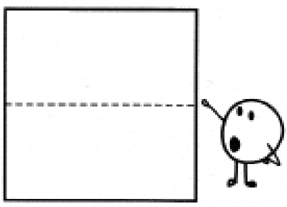


चारपदरी घडी असलेल्या
बाजूने त्रिकोणी घडी घाला.

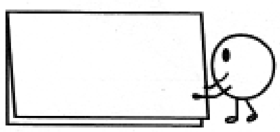
कागद पूर्ण उघडल्यावर त्याच्या मध्यावर काटकोन
नसलेला एक सुबक समभुज चौकोन तुम्हाला दिसेल.

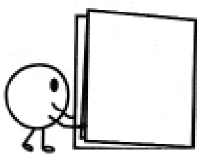
अनेक समांतर घड्या घातल्यात
तर तुम्हाला एकात एक असलेले
चौकटच्या पत्त्याच्या आकाराचे
अनेक सुरेख चौकटचे आकार दिसतील.

घडीचा अष्टकोन



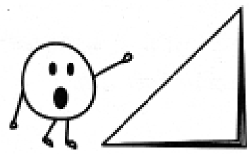
एका चौरस कागदाच्या मध्यावर आडवी घडी घाला.



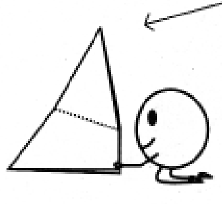


उजवीकडून डावीकडे
अशी आणखी
अर्धी घडी घाला.

डावीकडचे वरचे टोक
उजवीकडच्या खालच्या
टोकावर ठेवून त्रिकोण करा.

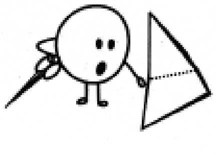


कागदाचा
मध्य

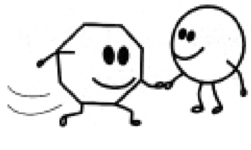


वरचे टोक खाली वळवून त्रिकोणाची घडी करा.

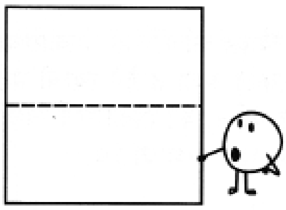
तुटक रेषेने
दाखवलेल्या
रेषेवर कापा.



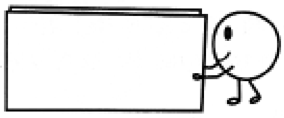
कागद उघडा,
झाला तुमचा
अष्टकोन तयार!

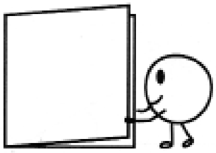


अधिकचे चिन्ह



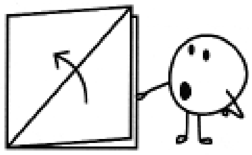
एका चौकोनी कागदाची खालून वर अशी अर्धी घडी घाला.

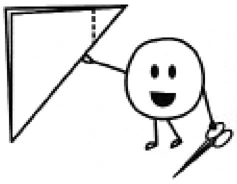




मग डावीकडून
उजवीकडे अशी
परत एक
घडी घाला.

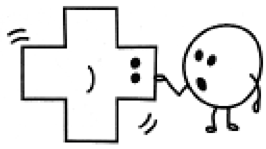
वरच्या पदराची कर्णातून
तिरकी घडी घाला,
कागद उलटा करून परत
मागच्या बाजूलाही तसेच करा.





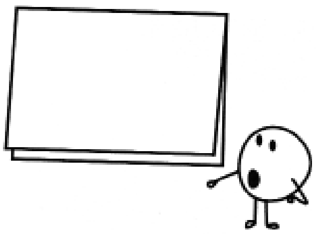
तुटक रेषेवर
कापा.

कागद उघडा,
झाले तुमचे
अधिकचे चिन्ह तयार!

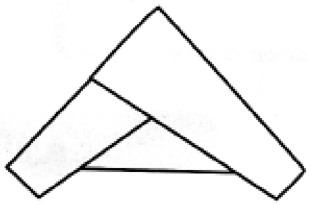


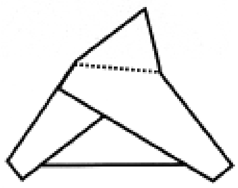
घडीचा षटकोन

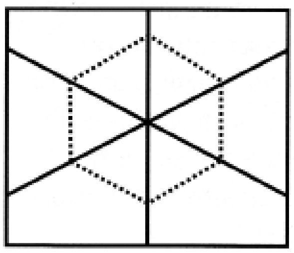
एका कागदाची
अर्ध्यात घडी घाला.

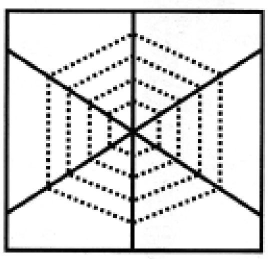


घडी असलेल्या बाजूच्या (180 अंश)
तीन सारख्या घड्या (60 अंशाच्या) घाला.







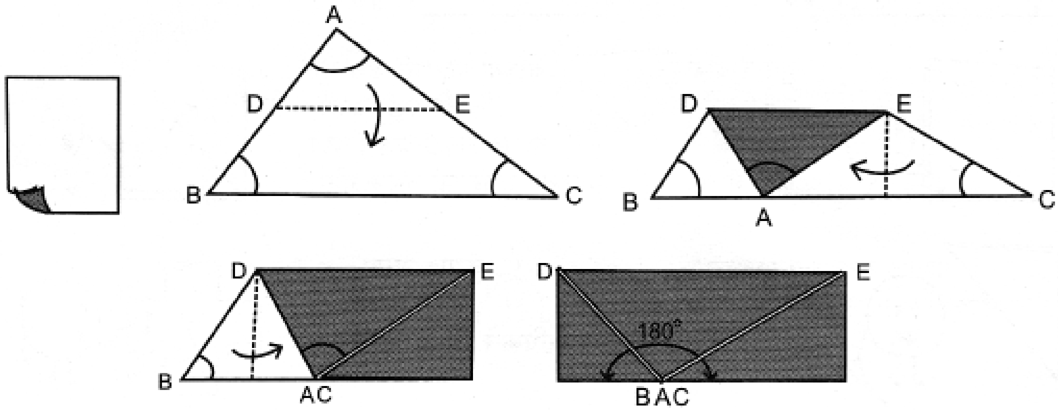


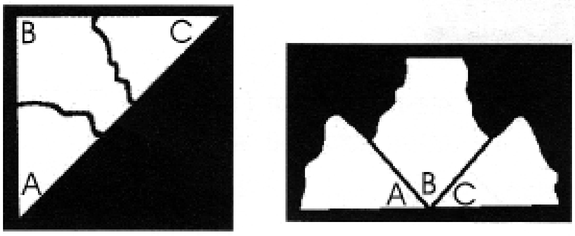
वरच्या टोकाच्या बाजूची एक त्रिकोणी
घडी घाला. कागदाची घडी उलगडल्यावर
तुम्हाला मध्यभागी एक षटकोन
तयार झालेला दिसेल.

वरच्या त्रिकोणी टोकाला जर तुम्ही
अनेक समांतर घड्या घातल्यात, तर
कागद उलगडल्यावर मध्यभागी तुम्हाला
कोळ्याच्या जाळ्याची प्रतिकृती आढळेल!

त्रिकोणाचे कोन

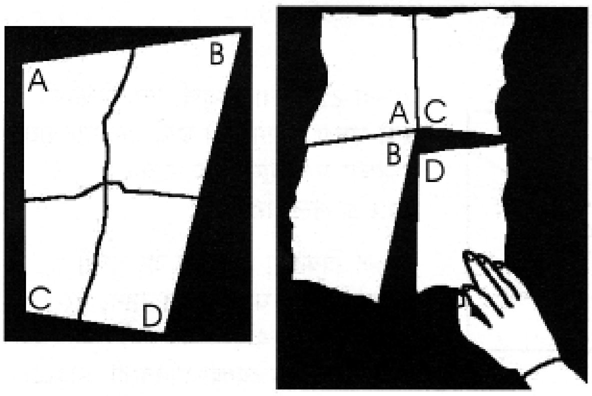
एका बाजूने पांढरा आणि दुसऱ्या बाजूने रंगीत असलेला एक कागद घ्या. त्यावर कोणत्याही आकाराचा एक ABC असा त्रिकोन काढा. A हा वरचा बिंदू BC या पायाच्या रेषेला टेकेल अशा तऱ्हेने त्याची घडी घाला. मग B आणि C या दोन कोनांचीदेखील घडी घाला. तुमच्या लक्षात येईल, की त्रिकोणाचे तिन्ही कोन एकत्र येऊन त्यांची एक सरळ रेघ तयार झाली आहे- म्हणजे 180 अंशाची रेघ.





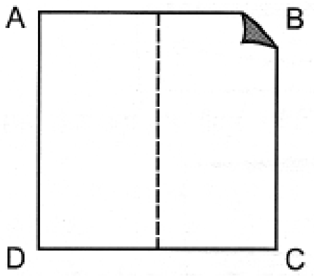
कोणत्याही त्रिकोणाचे तीन तुकडे करा आणि ते तीनही कोन एकत्र आणलेत तर त्यांची सरळ रेघ बनते (180 अंश), असे तुमच्या लक्षात येईल.

चौकोनाचे कोन

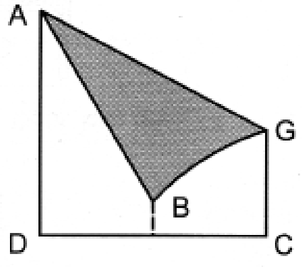


चार बाजू असलेला कोणताही एक चौकोन घ्या. चित्रात दाखवल्याप्रमाणे त्याचे चार तुकडे करा. मग त्या चौकोनाचे चारही कोपरे जवळ आणा. ते एकमेकांत बरोबर बसतील आणि त्यांची बेरीज होईल 360 अंश. वेगवेगळ्या आकाराचे चौकोन घेऊन हे करून पाहा.

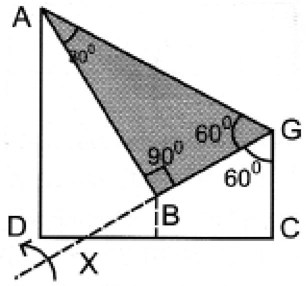
कागदाचा कोनमापक



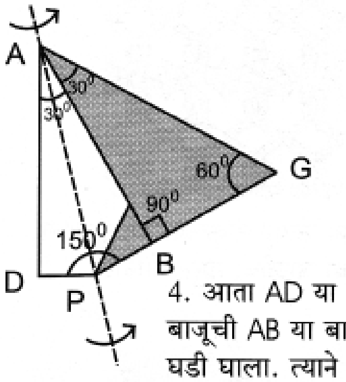
1. 10 सेंटीमीटर आकाराचा एक चौरस कागद घेऊन (ABCD) त्याची मध्यावर घडी घाला.



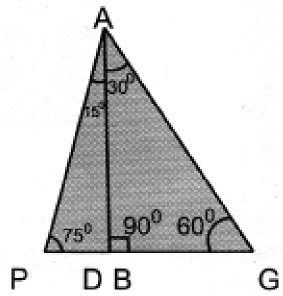
2. त्याचे B टोक मध्य रेषेवर अशा तऱ्हेने दुमडा, की त्याची A टोकापासून घडी होईल.



3. AGB हा 60 अंशाचा असेल. 'B' हा काटकोन असल्याने 90 अंशाचा आहे, म्हणून 'A' हा कोन 30 अंशाचा असेल. आता खालच्या बाजूची GX या रेषेवर घडी घाला.



4. आता AD या बाजूची AB या बाजूवर घडी घाला. त्याने DAB या कोनाचे दोन सारखे भाग होतील.



5. या कागदी कोनमापकाने 15, 30, 45, 60, 75 आणि 90 अंशाचे कोन मोजता येतील. आता तुम्ही जर कधी कोनमापक न्यायला विसरलात, तर घडी घालून लगेच एक कोनमापक तयार करा!

मैत्रीचे प्रतीक

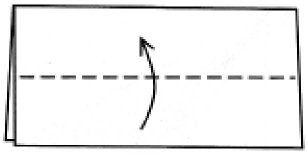
प्राचीन ग्रीक गणितज्ञ पायथॅगोरस याने 'पायथॅगोरसचा समाज' नावाचा एक नवा समुदाय स्थापन केला होता. जगातील सर्व काही आकड्यांच्या साहाय्याने समजून घेता येईल व त्याचे स्पष्टीकरणही देता येईल असा या समुदायातील लोकांचा विश्वास होता.

220 आणि 284 हे दोन आकडे त्यांचे फार आवडते होते. 220 च्या अवयवांची (1 आणि 220 सोडून) बेरीज केली तर उत्तर येते 284.

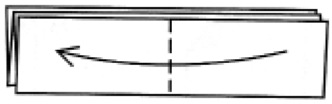
आणि 284 च्या अवयवांची (1 व 284 सोडून) बेरीज केली तर मिळतात 220.

या दोघांमध्ये हे विलक्षण नाते असल्याने पायथॅगोरसने त्यांना मैत्रीपूर्ण आकडे (ॲमिकेबल नंबर्स) असे नाव दिले. ते मैत्रीचे प्रतीक मानले गेले.

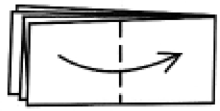
कातरकामाचे नमुने



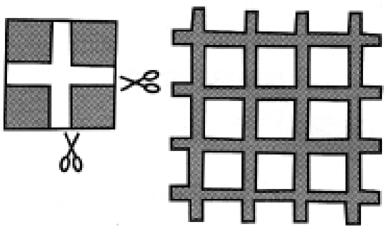
1. एका कागदाची अर्ध्यात घडी करा. मग वरच्या घडीचा खालचा पदर घडी केलेल्या वरच्या टोकाशी नेऊन परत एक घडी करा. कागदाच्या मागच्या बाजूलाही परत तसेच करा.



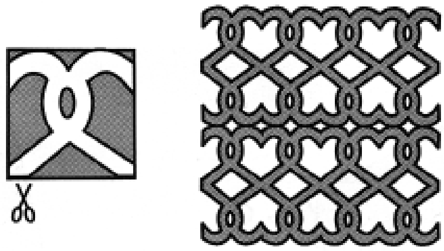
2. उजवी बाजू डाव्या बाजूवर येईल अशी परत एक घडी करा.



3. वरच्या बाजूच्या भागाच्या डाव्या बाजूची उजव्या बाजूवर परत एकदा घडी घाला. मागच्या बाजूने परत एकदा असेच करा. तुमच्या कागदाला आता 16 पदर असतील.

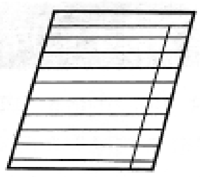


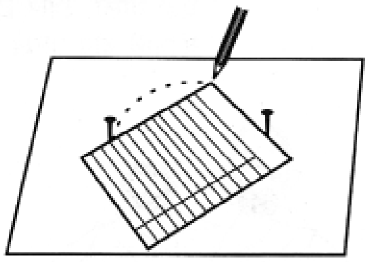
4. या लहान चौकोनाच्या चारी बाजूंचे सारख्या आकाराचे लहान चौकोन कापून टाका म्हणजे तुम्हाला कागदाचा जाळीचा नमुना मिळेल.

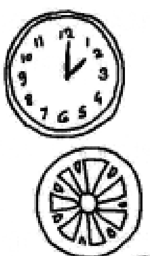


5. यातील रंगीत भाग कापून टाकलात तर तुम्हाला आणखीच गुंतागुंतीचा जाळीचा नमुना मिळेल.

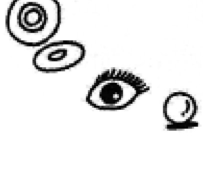
असेही वर्तुळ काढा





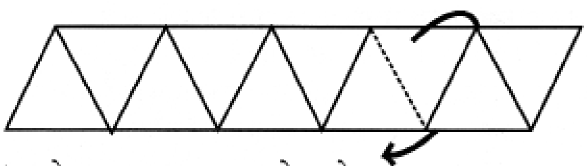


वर्तुळ काढण्याचा हा एक वेगळाच प्रकार आहे. एक आयताकृती कागद घ्या. एका पुठ्ठ्यावर 4 सेंटीमीटर अंतरावर दोन टाचण्या लावा. दोन टाचण्यांमध्ये कागदाचा काटकोन अशा तऱ्हेने बसवा, की कागदाच्या दोन बाजू टाचण्यांना टेकतील. काटकोनाच्या जागी पेन्सिलीने एक ठिपका काढा.

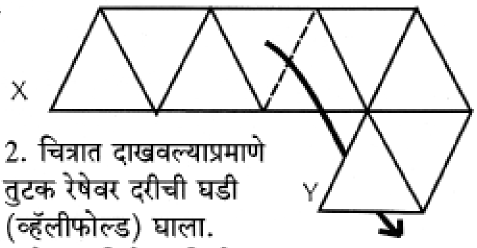


कागदाची जागा दरवेळी हलवून एक एक नवा ठिपका काढा.
एका बाजूचे अर्धवर्तुळ पूर्ण झाले, की काटकोनाची दिशा उलटी करा आणि दुसऱ्या बाजूनेही तसेच अर्धवर्तुळ पूर्ण करा.

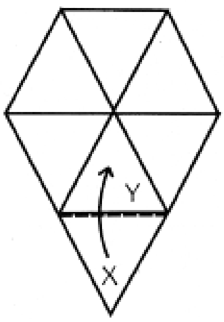
शोभादर्शक यंत्र (कॅलिडोस्कोप)



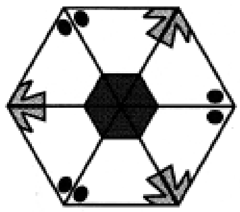
1. कोनमापकाच्या साहाय्याने प्रत्येक बाजू 5 सेंटीमीटर असणाऱ्या 10 समभुज त्रिकोणांची एक पट्टी तयार करा. चित्रात दाखवलेल्या तुटक रेषेवर पर्वताची घडी (माउंटन फोल्ड) घाला.



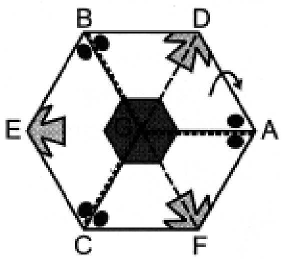
2. चित्रात दाखवल्याप्रमाणे तुटक रेषेवर दरीची घडी (व्हॅलीफोल्ड) घाला.
X ने दाखविलेला त्रिकोण Y त्रिकोणाखाली येईल.



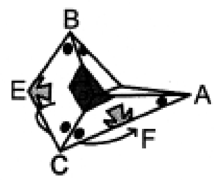
3. X त्रिकोणाला डिंक लावून दरीची घडी घाला व ती Y त्रिकोणाला चिकटवा.



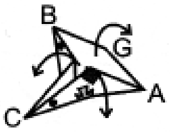
4. शोभादर्शक आता पूर्ण झाला आहे. वर दाखवल्याप्रमाणे त्यावर चित्रे काढा किंवा तुमच्या मनाप्रमाणे नक्षी काढा.



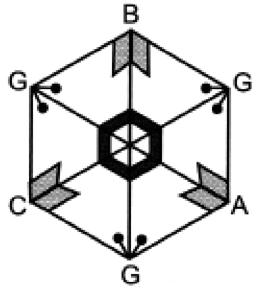
5. नक्षी बदलण्यासाठी केंद्रबिंदूपासून निघणाऱ्या पाच घड्या घाला.



6. E ने दर्शवलेला भाग F ला टेकेल अशी घडी घाला.



7. आता वरून उघडलेत तर नवी बाजू बाहेर येईल आणि तुम्हाला वेगळीच नक्षी दिसेल.

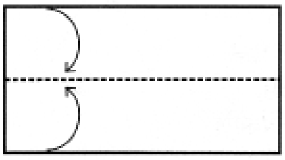


8. शोभादर्शक वेगवेगळ्या प्रकारांनी उघडा आणि नवी नक्षी तयार करा.

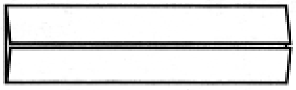
9. शोभादर्शक उलटे करा. वेगळ्या बाजूने उघडा आणि नवी नक्षी तयार करा. एकदा नक्षी कशी बदलायची हे लक्षात आले, की तुम्ही तुमचे स्वत:चे रंगीत पुस्तकही तयार करू शकाल.

आश्चर्यकारक फ्लेक्सागॉन

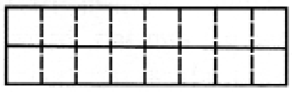
फ्लेक्सागॉन हे एक फिरवता येण्याजोगे कागदाच्या घड्या घालून बनवण्याचे खेळणे आहे. त्याला वेगळ्या तऱ्हेने फिरवले, की निराळेच चित्र समोर येते. एखाद्या गोष्टीचे चार टप्पे किंवा एखादी मालिका दाखवण्यासाठी त्याचा उपयोग करता येतो. अजिबात न फाटता कागद इतक्या प्रकारांनी फिरवता येतो हे खरोखरच आश्चर्यकारक आणि अविश्वसनीय आहे.



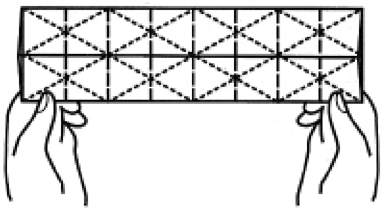
1. 20 सेंमी. x 10 सेंमी. आकाराचा झेरॉक्ससाठी वापरतात तसा कागद घ्या. त्यात दोन चौरस असतील.



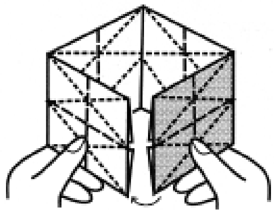
2. लांबीच्या बाजूने कागदाच्या मध्याशी भिडतील अशा दोन घड्या घाला.



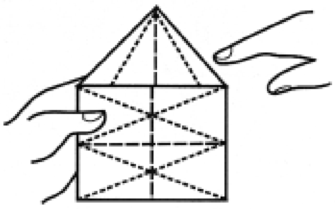
3. रुंदीच्या बाजूने आठ सारख्या अंतराच्या घड्या घाला.



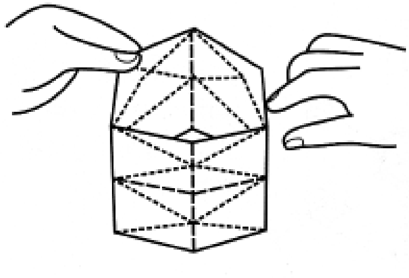
4. पट्टी आणि पेन्सिल घेऊन चित्रात दाखवल्याप्रमाणे दहा तिरक्या रेषा मारा.



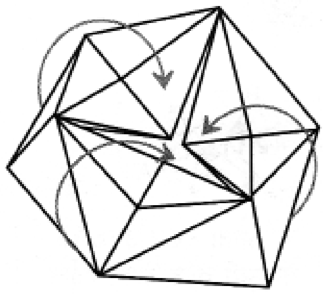
5. रंगवलेले 2 भाग डाव्या हाताच्या फटीत अडकवा म्हणजे ते घट्ट बसतील आणि लोलक तयार होईल.



6. वरच्या आणि खालच्या बाजूच्या त्रिकोणी घड्या आतल्या बाजूला दुमडा.



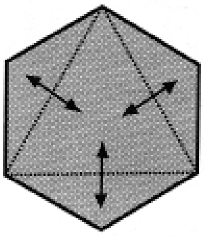
7. या बाजू आत दुमडल्या की फ्लेक्सागॉन झाला तयार.



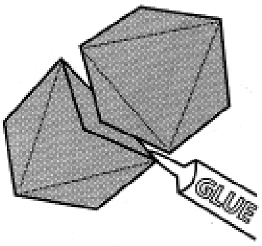
8. हा आकार आता दोन्ही हातात धरा आणि गोल फिरवा. लवकरच चार निरनिराळ्या बाजू दिसू लागतील. याचा वापर करून अन्नाची साखळी, निरनिराळे ऋतू किंवा फुलपाखराच्या प्रगतीचे टप्पे, अशा अनेक गोष्टी तुम्हाला दाखवता येतील.

कागदाचा चेंडू

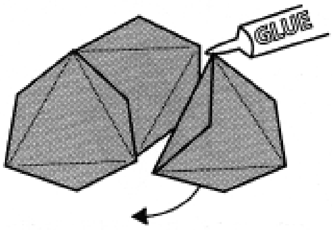
कागदाचे 20 षटकोन घेऊन तुम्हाला कागदाचा चेंडू बनवता येईल.



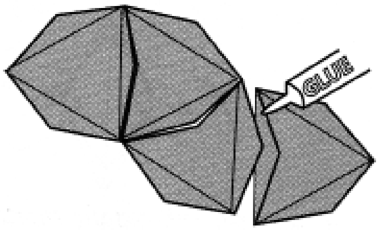
1. एक षटकोन घ्या आणि त्याच्या एक सोडून एक टोकांची मध्याकडे घडी घाला. घड्या मजबूत करून त्या मध्यभागाशी काटकोन करून सरळ उभ्या राहतील असे पहा. आणखी चार षटकोन घेऊन असेच करा.



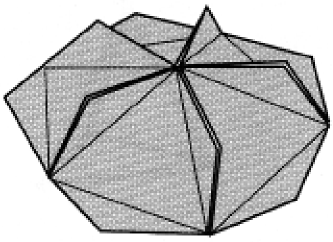
2. दोन उभ्या त्रिकोणांच्या बाहेरच्या बाजूला डिंक लावून त्यांना एकत्र चिकटवा.



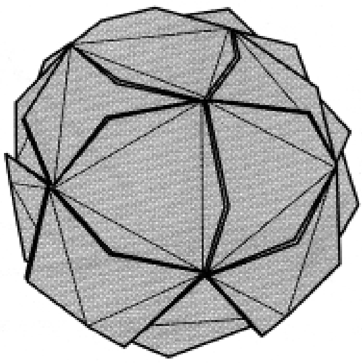
3. त्याचप्रमाणे तिसरा षटकोनही पहिल्या दोघांना चिकटवा.



4. आणखी दोन षटकोनही चिकटवा. पाचवा षटकोन पहिल्याला चिकटवला जाईल...



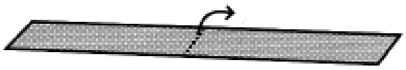
5. आणि पाच त्रिकोणी बाजू असलेली आणि मध्यावर उभ्या घड्या असलेली एक आकृती तयार होईल.

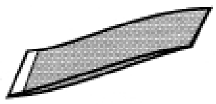


20 भाग असलेला चेंडू तयार!

6. आता राहिलेले दहा षटकोन ओळीने चिकटवा. क्रमांक 3 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे पहिले तीन षटकोन जोडायचे आहेत हे लक्षात ठेवा, पण चौथा मात्र वेगळ्या ठिकाणी चिकटवायचा आहे. या साखळीच्या दोन्ही टोकांना डिंक लावून चिकटवा. मग वरचा आणि खालचा भाग डिंकाने चिकटवलात, की झाला तुमचा चेंडू तयार!

कागदी पट्टीचा चतुष्फलक (टेट्राहेड्रॉन)

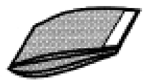


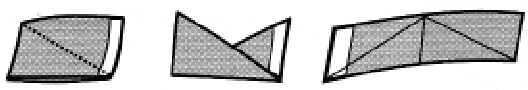


1. 28 सेंमी. x 4 सेंमी. ची कागदाची पट्टी घेऊन त्याची अर्ध्यावर घडी घालून सुटी टोके जवळ आणा.

2. ती टेप लावून चिकटवून टाका.

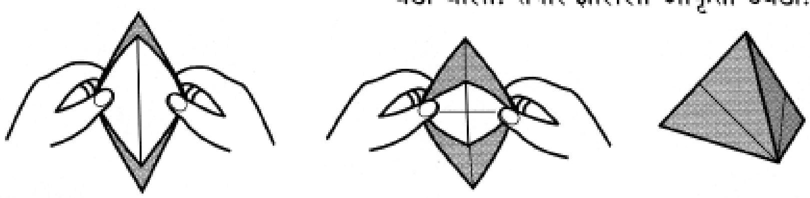
3. टेप लावलेली बाजू एका बाजूला आणा.





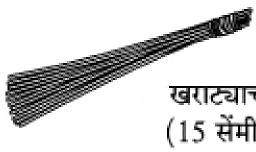
4. परत एकदा अर्ध्यावर घडी घाला.

5. कर्णाच्या बाजूने माउंटन / व्हॅली पद्धतीने घडी घाला. तयार झालेली आकृती उघडा.



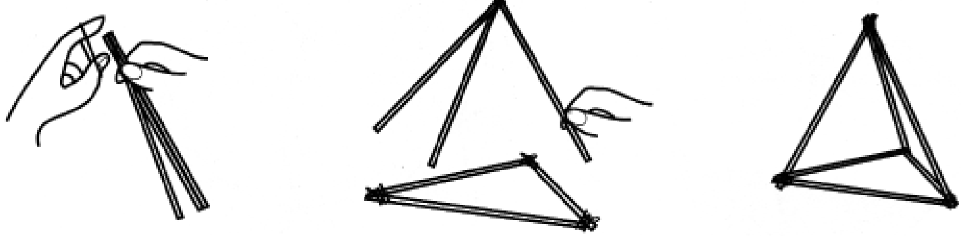
6. कागदाची होडी उघडतो त्याप्रमाणे उघडा. दोन्ही बाजू एकत्र आणा म्हणजे टेट्राहेड्रॉन तयार होईल.

खराट्याच्या काड्यांच्या आकृती

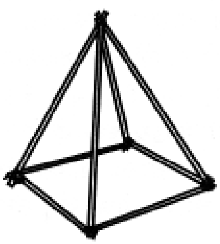


खराट्याच्या काड्या
(15 सेंमी लांबीच्या)

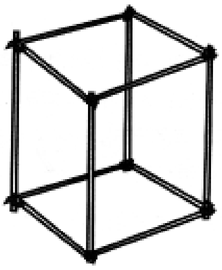
दोरा



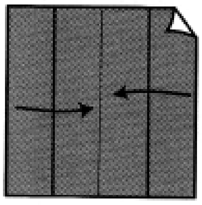
समभुज त्रिकोणाच्या तीन टोकांना तीन काड्या बांधून चतुष्फलक (टेट्राहेड्रॉन) तयार होईल.



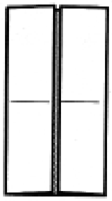
कमी खर्चाचे त्रिमिती नमुने तुम्हाला खराट्याच्या काड्या दोऱ्याने बांधून बनवता येतील. उदाहरणार्थ, तुम्हाला पिरॅमिड किंवा ठोकळ्यासारखा घन आकार सहज बनवता येईल.



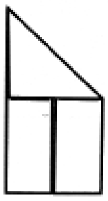
घड्या घालून बनवलेला ठोकळा



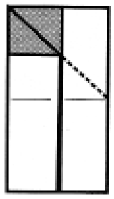
1. एका चौरस कागदाच्या विरुद्ध बाजूंच्या कडांची मध्यावर घडी घाला.



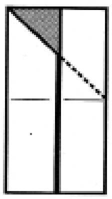
2. ही झाली कपाटासारखी घडी.



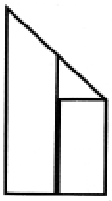
3. वरच्या बाजूच्या अर्ध्या भागाची डावीकडे त्रिकोणी घडी घाला.



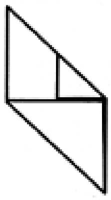
4. ती उघडल्यावर एक लहान त्रिकोणी फ्लॅप दिसेल.



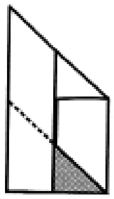
5. तिची घडी घालून ती आतल्या बाजूला खोचा.



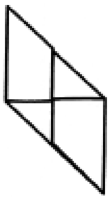
6. उजवीकडचे टोक डाव्या बाजूच्या सरळ रेषेतील चौकोनाच्या आत घाला.



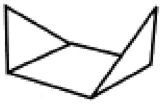
7. खालच्या बाजूच्या डाव्या कोपऱ्यालाही अशीच कृती करा. उजवीकडच्या खालच्या काटकोनाचे दोन भाग करा.



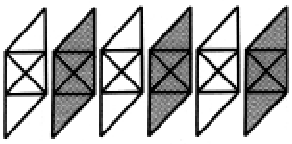
8. लहान त्रिकोणी फ्लॅप आत खोचा.



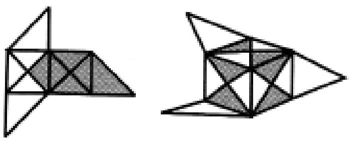
9. खालच्या बाजूचा कोपरा आत घालून एक समांतरभुज चौकोन तयार होईल.



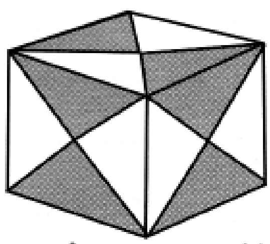
10. उलटी बाजू वर घेऊन दोन्हीकडील त्रिकोणी भाग दुमडा. या ठोकळ्याच्या पायाकडील बाजूला चार मोकळे खिसे असतील.



11. अशाच प्रकारचे सहा समांतरभुज चौकोन तयार करा.



12. एकाची त्रिकोणी घडी दुसऱ्याच्या खिशात जाईल.



13. सर्व घड्या अशा तऱ्हेने खिशात घातल्यात म्हणजे डिंकाविना तुमचा ठोकळा तयार होईल.

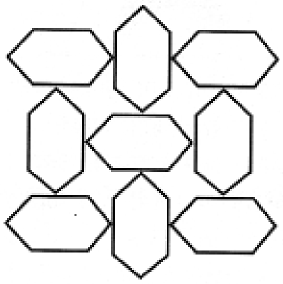
सांकेतिक चिन्हांची गणिते

खाली काही कठीण कोडी दिली आहेत. आकड्यांऐवजी यात अक्षरे आहेत! प्रत्येक अक्षराने 0 ते 9 यापैकी एक संख्या दर्शवली आहे आणि प्रत्येक अक्षर एकच संख्या दर्शवते. प्रत्येक अक्षर म्हणजे कोणती संख्या असेल ते ओळखून ही गणिते करायची आहेत! (उत्तरे पृष्ठ 9 वर).

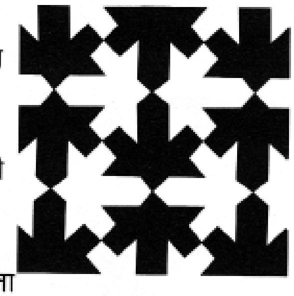
1. BOYS + BOYS SILLY	2. GIRLS + GIRLS SILLY	3. ARCS + BRAS CRASS	4. LLAMA – SEAL SEAL
5. LIP + LIT PIPE	6. PEP + PEP ERNE	7. GOOD + DOG FANGS	8. TOO TOO TOO + TOO HOT
9. HER + HURL SELLS	10. SPIT + SIP TIPS	11. PET PET + PET TAPE	12. SEND + MORE MONEY
13. STILL STALL + STILT NITWIT	14. EIGHT + EIGHT TATTOO	15. ONE + ONE ZERO	16. THIS IS + VERY EASY
17. CROSS + ROADS DANGER	18. METER LITRE + GRAMS METRIC	19. JUNE + JULY APRIL	20. THREE THREE + FOUR ELEVEN

जमिनीवरील नक्षी (टेसेलेशन)

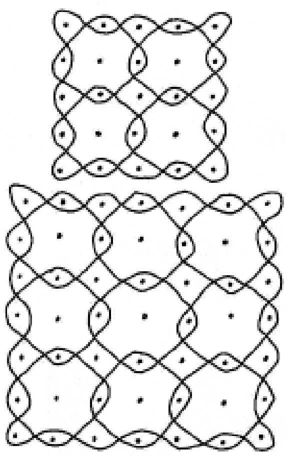
भूमितीतील वेगवेगळ्या आकारांचे तुकडे म्हणजे टाइल्स जमिनीवर बसवून निरनिराळ्या प्रकारची नक्षी बनवता येते. यात टाइल्सचे कोणतेच तुकडे एकावर एक येत नाहीत किंवा त्यात रिकामी जागाही सोडलेली नसते. याला टेसेलेशन म्हणतात. इतिहासाच्या दृष्टीने पाहिले, तर प्राचीन रोममध्ये आणि मुसलमानी कलेत याचा वापर करण्यात येत असे. उदाहरणार्थ, ताजमहालच्या फरशीवर अशा प्रकारची नक्षी आहे. विसाव्या शतकात एम. सी. एस्चेर यांनी याचा कलात्मक दृष्टीने वापर केला आहे. मधमाशीच्या पोळ्यातील षटकोनी आकाराच्या लहान लहान खिडक्या हे याचेच उदाहरण आहे.



ताजमहालच्या जमिनीवरील नक्षी.



सुप्रसिद्ध कलाकार एम. सी. एस्चेर (1898-1972) यांच्या कलाकृतींतून अनेक गणितज्ञांना प्रेरणा मिळाली आहे. स्पेनमधील अल्हांब्रा येथील भिंतींवरील अनेक नक्षीकामांचा त्यांनी अभ्यास केला होता. त्या विशेष नक्षीकामांबद्दल ते आपल्या पुस्तकात म्हणतात : ''या अमूल्य ठेव्यातून मला सर्वाधिक प्रेरणा मिळाली आहे. एकमेकांशेजारी असणारे एकसारखे आकार भरताना त्यात अजिबात रिकामी जागा न सोडण्यानेही एखाद्या पृष्ठभागाचे विशिष्ट स्वरूपात विभाजन करता येते.''



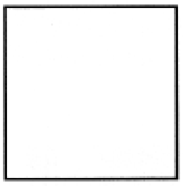
लोककला कोलम

कोलम हा तामिळनाडूमधील 5000 वर्षांपासून चालत आलेला लोकप्रिय नक्षीकामाचा प्रकार आहे. कोलमची नक्षी जमिनीवर पूजास्थानी किंवा घराच्या मुख्य दरवाजाशी काढली जाते.

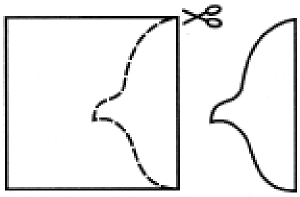
कौतुक वाटण्याजोगी ही नक्षी सहजपणे काढली जाते. यासाठी तांदळाची पिठी किंवा रांगोळीचा वापर केला जातो. त्यामुळे ती बहुधा पांढऱ्या रंगाची असते. अंगठा आणि पहिल्या बोटाच्या चिमटीत पीठ घेऊन रेघांची नक्षी काढण्यापूर्वी ठिपके काढले जातात. ठिपक्यांच्या चौकटीच्या आधाराने ही नक्षी काढली जाते.

टेसेलेशनचे काही साधे नमुने

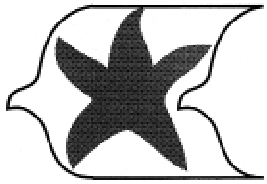
कोणत्याही आकाराचा वापर करून नवी नक्षी कशी तयार करायची आणि त्यातूनच गुंतागुंतीचे नमुने कसे बनवायचे त्याची काही साधी उदाहरणे आता पाहूया :



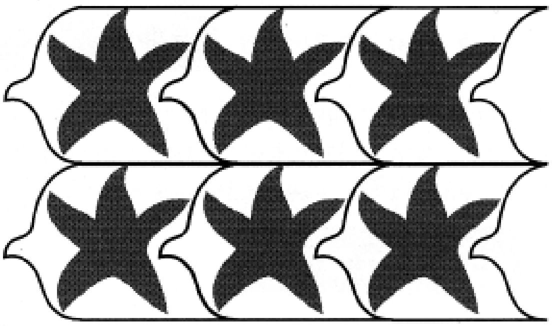
1. प्रथम एक चौकोन काढा.



2. त्या चौकोनाची एक बाजू कोणत्याही आकारात कापा.



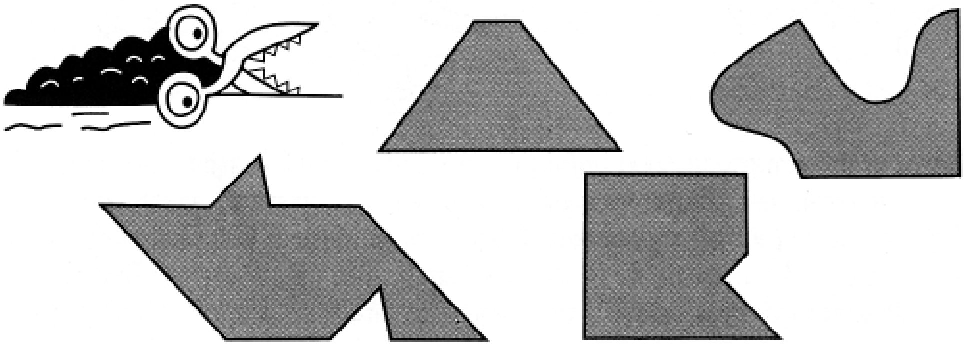
3. कापलेला भाग चौकोनाच्या दुसऱ्या बाजूला लावा. आता तयार झालेल्या नव्या आकारात कसलेही चित्र काढा.



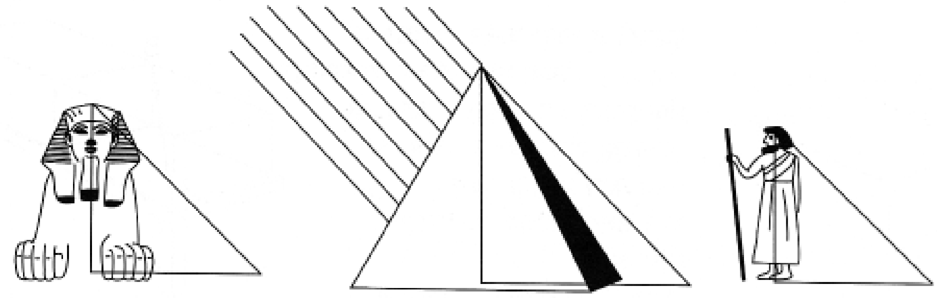
4. नवीन तयार झालेला आकार परत परत वापरून तुमची नक्षी तयार होईल. आणखी नवे नमुने आपल्या मनाने तयार करा.

चौकोन बनवा

खाली दिलेले आकार दुसऱ्या एका जाड कागदावर काढा. हे काही खास आकार आहेत. प्रत्येक आकार फक्त एकदाच कापून त्याचे असे दोन तुकडे करता यायला हवेत, की ते दोन तुकडे जोडून त्यांचा एक चौरस बनेल!



उंची कशी मोजणार!



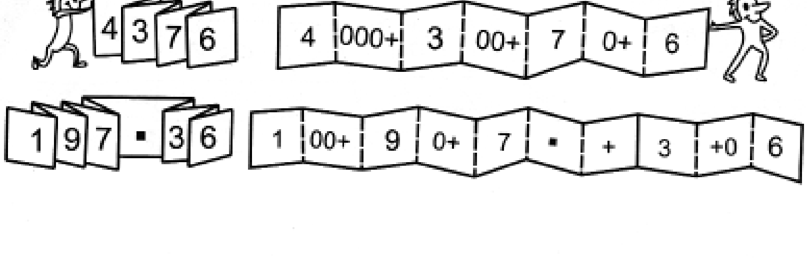
आशिया मायनर या देशातील मिलेटस या गावचे थेलेस (ख्रिस्तपूर्व 624– ख्रिस्तपूर्व 546) हे एक ग्रीक तत्त्वज्ञ होते. पुराणात दिलेल्या जगाच्या कल्पना त्यांना मान्य नव्हत्या. विज्ञानातील क्रांतिकारी विचारांची त्याच्यापासूनच सुरुवात झाली. एकदा ते सुट्टीसाठी इजिप्तला गेले. वाळूने अर्धवट झाकले गेलेले तीन पिरॅमिड्स आणि स्फिंक्स बघायला ते जवळच्या गिझाच्या वाळवंटात गेले. ख्रिस्तपूर्व 600 साली थेलेस जेव्हा पिरॅमिड पाहायला गेले तेव्हादेखील ते 2000 वर्षांपूर्वीचे होते.

त्यांच्याबरोबर असलेल्या वाटाड्यांना थेलेस यांनी विचारले, या पिरॅमिडची उंची किती असेल?

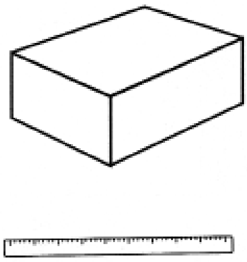
सर्व वाटाडे गोंधळूनच गेले. त्यांना उंचीची काहीच कल्पना नव्हती. आतापर्यंत आलेल्या प्रवाशांनी कधीच असा प्रश्न विचारला नव्हता. थेलेस सर्वात मोठ्या म्हणजे ग्रेट पिरॅमिडच्या उंचीचा विचार करू लागले. त्यांच्या असे लक्षात आले, की वाळवंटातील प्रत्येक वस्तूची सावली एकाच अंशात पडत होती. त्याचाच अर्थ होता, की सूर्याच्या किरणांनी प्रत्येक वस्तूची सावली सारख्याच त्रिकोणाच्या रूपात पडत होती. मग त्यांच्या स्वत:च्या सावलीच्या संदर्भाने त्यांनी ग्रेट पिरॅमिडच्या उंचीचे गणित मांडले. थेलेस यांच्या असे लक्षात आले, की दिवसाच्या एका विशिष्ट वेळी त्यांच्या सावलीची लांबी त्यांच्या स्वत:च्या उंचीइतकी होती. म्हणून मग पिरॅमिडची उंची जाणून घेण्यासाठी त्यांनी त्याच वेळी पिरॅमिडच्या सावलीची लांबी मोजली. थेलेस यांनी प्रत्यक्षात पिरॅमिडची उंची मोजली होती का? याचे निश्चित उत्तर देणे कठीण आहे. परंतु इतक्या उंच वस्तूची उंची मोजण्यासाठी त्याच्याच सावलीचा वापर करण्याची कल्पना इतकी सुंदर आणि वैशिष्ट्यपूर्ण आहे, की आता-देखील त्यापासून आपल्याला प्रेरणेचा आनंद मिळतो. गिझाच्या ग्रेट पिरॅमिडची उंची सुमारे 139 मीटर आहे.

स्थानाची किंमत दर्शवणारा साप

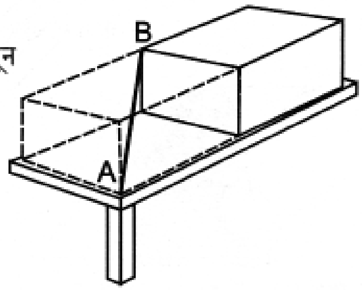
हे शैक्षणिक खेळणे एका कागदाच्या पट्टीचे बनवण्यात आले आहे. हा साप उलगडला, की प्रत्येक आकड्याची त्याच्या स्थानानुसार असलेली किंमत दिसते.



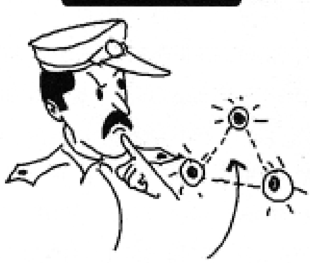
विटेचा कर्ण



फूटपट्टीचा वापर करून एखाद्या विटेचा – तिच्या एका वरच्या टोकापासून विरुद्ध बाजूच्या खालच्या बाजूच्या खालच्या टोकापर्यंतचा लांब कर्ण कसा काय मोजता येईल?
याचे उत्तर आश्चर्य वाटण्याइतके सोपे आहे.
प्रथम वीट टेबलाच्या कोपऱ्यावर ठेवा. मग तिच्या लांबीइतकीच ती मागे सरकवा. मग A टोकापासून B टोकापर्यंतची लांबी सहजच मोजता येईल.



चोर पकडा

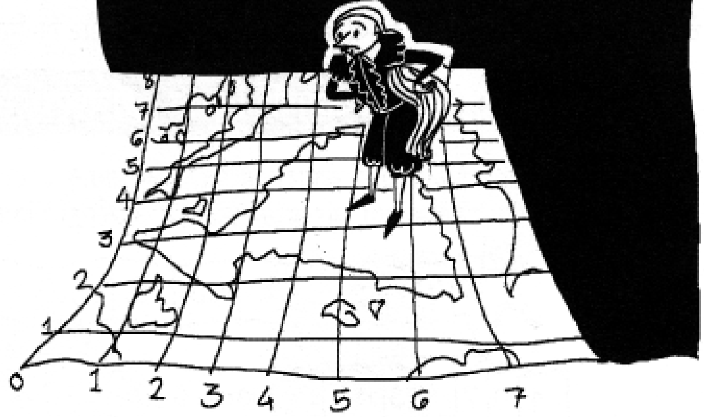


चोरांना शोधण्यासाठी पोलीस बऱ्याच वेळा त्यांच्या मोबाईल फोनमधून येणाऱ्या संकेतांचा त्रिकोणात्मक पद्धतीने विचार करतात. फोन कंपनी प्रथम त्या फोनमधून येणारे विशिष्ट सिग्नल शोधते. त्यावरून मग त्या फोनच्या सर्वात जवळचे तीन टॉवर कोणते हे ते ठरवतात.

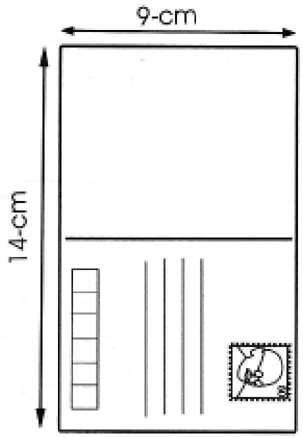
प्रत्येक टॉवरवरून येणारे आणि फोनमधील सिग्नल यांच्यातील ताकदीवरून ते त्या फोनचा ठावठिकाणा निश्चित करू शकतात.

नकाशे आणि भूमापन

सतराव्या शतकातील फ्रेंच गणितज्ञ रने डेकार्ट यांनी नकाशावरील स्थाने शोधून काढण्यासाठी एका नव्या पद्धतीचा शोध लावला. त्यांच्या या पद्धतीनुसार नकाशावरील कोणतेही स्थान त्याचे उभ्या (Y अक्ष) व आडव्या (X अक्ष) अक्षांतील अंतराच्या संदर्भाने सांगता येते. त्यांना कार्टेशियन कोऑर्डिनेट्स (कार्टेशियन अक्ष) असे नाव देण्यात आले आहे.



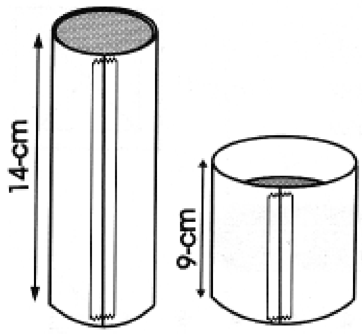
कशात जास्त मावेल?



भारतातल्या पोस्टकार्डांचा आकार 14 सेंमी. × 9 सेंमी. असा असतो. दोन पोस्टकार्डे घेऊन त्यांचे दोन दंडगोल (सिलिंडर) बनवा व त्यांना टेप लावा. मात्र, एक लांबीच्या बाजूने बनवा आणि दुसरा रुंदीच्या बाजूने. म्हणजे तुम्हाला एक 14 सेंमी उंचीचा व दुसरा बुटका आणि जाड असा 9 सेंमी उंचीचा असे दोन आकार मिळतील.

दोन्ही दंडगोलांच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ सारखेच असेल.

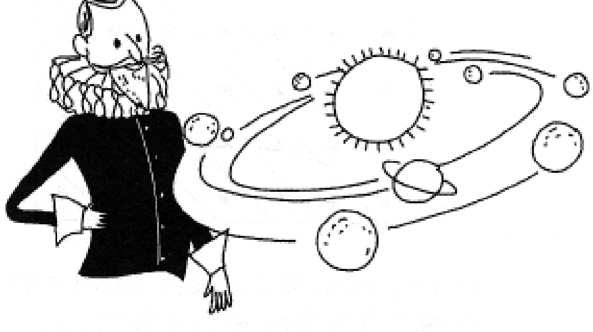
आता तुमच्या मित्रांना विचारा, की कोणत्या सिलिंडरमध्ये अधिक वाळू मावेल?



बहुतेक जण म्हणतील, की दोन्हीत सारखीच वाळू मावेल. पण एकदा प्रत्यक्ष करून पाहिल्यावर त्यांना आश्चर्याचा धक्काच बसेल. प्रथम उंच सिलिंडर वरच्या टोकापर्यंत वाळूने भरा. नंतर जाड सिलिंडर उंच सिलिंडरवर सरकवा आणि आतील उंच सिलिंडर हळूच वर ओढून काढून घ्या. म्हणजे मोठ्या सिलिंडरमध्ये वाळू कुठपर्यंत आली ते तुम्हाला सहज पाहता येईल.

जाड सिलिंडरमध्ये वाळू फक्त दोन-तृतीयांश भरली आहे असे तुम्हाला दिसेल! दंडगोलाचे आकारमान हे त्याचा व्यास आणि उंची यांच्या वर्गातून मिळते. जाड सिलिंडरचा व्यास मोठा असल्याने त्याचा वर्ग केला असता त्याचे आकारमानही वाढते.

विश्वाची समज



सतराव्या शतकाच्या सुरुवातीला योहान्स केप्लर या जर्मन गणितज्ञ व खगोलशास्त्रज्ञाने निरनिराळ्या आकारांवर प्रयोग केले आणि त्यावरून सूर्य आणि ग्रह यांचा एकमेकांशी कसा संबंध आहे हे त्यांनी शोधून काढले.

त्यांनी असा सिद्धांत मांडला, की ग्रह सूर्याभोवती वर्तुळाकार कक्षेत न फिरता ते लंबवर्तुळाकार कक्षेत फिरतात. या शोधामुळे ग्रह आणि त्यांचे उपग्रह अंतराळात कशा तऱ्हेने फिरत असतील याचा अचूक अंदाज बांधता आला.

नवीन पद्धतीने विचार करा

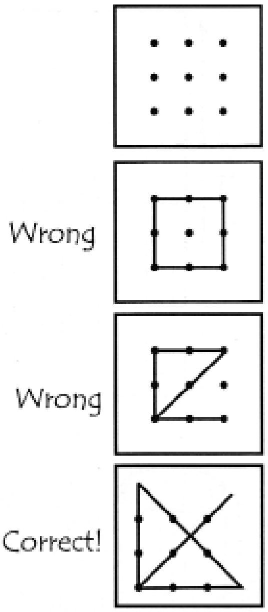
इथे काही कोडी दिली आहेत, त्यावरून तुम्हाला नव्या दृष्टीने पाहण्याची व विचार करण्याची सवय लागण्यास मदत होईल. त्यामुळे तुम्ही स्वत:च ठरवलेल्या मनाच्या मर्यादा तुम्हाला ओलांडता येतील.

हेच उदाहरण पाहा.

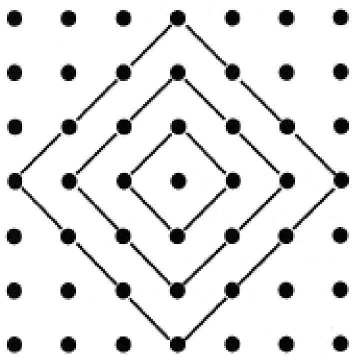
एका कागदावर, फळ्यावर किंवा जमिनीवरच्या धुळीत शेजारी दाखवले आहेत तसे 9 ठिपके काढा. एकमेकांना जोडलेल्या चार सरळ रेषा काढून सर्व ठिपके तुम्ही जोडा. मात्र, पेन्सिल कागदावरून उचलायची नाही.

बहुतेक सर्वच जण मनात कल्पना केलेल्या नऊ ठिपक्यांच्या चौकोनी आकाराबाहेर जाण्याचा विचारही करणार नाहीत. जणू ते त्या डब्यात बंदिस्त आहेत. काही तर चार रेघांनी 9 टिपके जोडणे अशक्य आहे असा निष्कर्ष काढून मोकळे होतील.

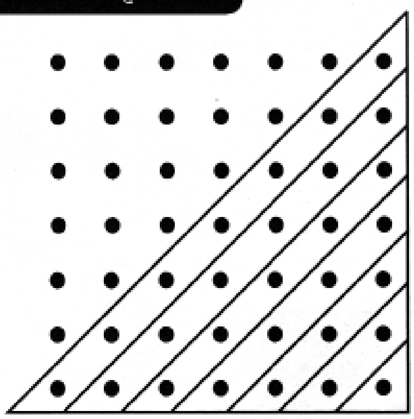
तुमच्या मनाने घातलेल्या मर्यादेबाहेर पडल्यावर असे करणे शक्य होईल अशी एक सूचना तुम्ही स्वत:ला देऊन पाहा. अखेर बहुधा एखाद्याला याचे उत्तर सापडेल. मनाने ठरवलेल्या चौकोनाबाहेर जर रेषा वाढवल्या तर हे सहज साध्य होईल.



ठिपक्यांवरून दिसणारे आकड्यांचे आकृतिबंध



चित्रात दाखवल्याप्रमाणे नमुना बनवा आणि प्रत्येक चौकोनच्या रेषेवर असलेले ठिपके मोजा : 4, 8, 12...
आणि प्रत्येक चौकोनात असलेले ठिपके मोजा : 1, 5, 13...

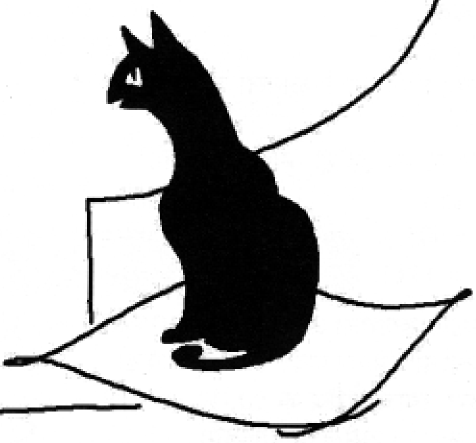


चित्रात दखवल्याप्रमाणे काटकोन-त्रिकोण काढून प्रत्येकात किती ठिपके येतात ते मोजा.
1, 3, 6, 10... बाराव्या त्रिकोणात किती ठिपके येतील?

मांजरे आणि चटया

एकदा काय झाले,
काही मांजरांना सापडल्या
काही चटया. प्रत्येक चटईवर
जर एकच मांजर बसले,
तर एका मांजराला चटई
मिळणारच नाही.

पण आता एका चटईवर
जर दोन मांजरे बसली,
तर एक चटई रिकामीच राहील.
तर किती मांजरे आणि
किती चटया होत्या?



उत्तर : प्रथम असा प्रश्न विचारा : पहिल्यांदा वर्णन केलेली परिस्थिती असण्यासाठी दुसऱ्यांदा वर्णन वर्णन केलेल्या परिस्थितीप्रमाणे सर्व चटयांवर बसण्यासाठी आणखी किती मांजरे असावी लागतील? ते शोधणे सोपे आहे. पहिल्या परिस्थितीत एका मांजराला चटई मिळाली नव्हती, तर दुसऱ्या वेळी सर्व मांजरे चटयांवर बसूनही आणखी दोन मांजरांसाठी जागा शिल्लक होती.

म्हणजेच दुसऱ्या परिस्थितीत सर्व चटया भरतील इतकी मांजरे हवी असतील, तर 1+2 म्हणजे पहिल्या परिस्थितीपेक्षा आणखी तीन मांजरे असावी लागतील. पण मग प्रत्येक चटईवर आणखी एका मांजराला बसावे लागेल. म्हणजेच एकूण चटया तीन होत्या. आता प्रत्येक चटईवर एकेका मांजराला बसवले, तर त्यात आणखी एक मांजर घ्यावे लागेल की ज्याला चटई मिळाली नव्हती, म्हणजे ती झाली चार. म्हणजे उत्तर आहे तीन चटया आणि चार मांजरे.

पॅलिंड्रोम

पॅलिंड्रोम म्हणजे एखादा शब्द किंवा एखादे वाक्य किंवा अंकांचा एखादा गट उलट सुलट कसाही वाचला तरी सारखाच येतो. जे पूर्णांक उलटीकडून लिहिले तरी सारखेच दिसतात त्यांनाही पॅलिंड्रोमच म्हणतात. ज्यांना शब्दांशी आणि आकड्यांशी खेळायला आवडते, त्यांना अशा बाबींमध्ये खूपच आनंद वाटतो.

मराठीतील अशी काही उदाहरणे शोधा पाहू.
आता एक उदाहरण घेऊया. 132 ही संख्या म्हणजे काही पॅलिंड्रोम नव्हे. पण ती उलटी करा आणि तीच परत त्यात मिळवा.
132 + 231 = 363.
काही वेळा असा पॅलिंड्रोम मिळायला बराच वेळ लागेल.
उदाहरण म्हणून आपण 68 हा आकडा घेऊया.
68 + 86 = 154
154 + 451 =605
605 + 506 = 1111

ज्या दोन आकडी संख्यांतील अंकांची बेरीज 10 पेक्षा कमी असेल, त्यांचा पहिल्या पायरीतच दोन आकडी पॅलिंड्रोम मिळेल. त्यांची बेरीज जर 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 किंवा 18 असेल तर पॅलिंड्रोम मिळण्यासाठी अनुक्रमे 2, 1, 2, 2, 3, 4, 6, 6 पायऱ्या घ्याव्या लागतील.

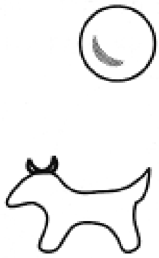
हे तुम्ही स्वत: करून पाहा, तुम्हाला मजा येईल.

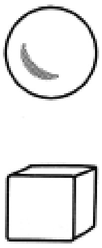
आता काही इंग्रजी शब्दांचे पॅलिंड्रोम पाहूया :

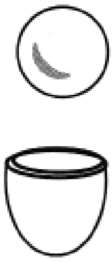
DAD
RADAR
EVIL OLIVE
MADAM I'M ADAM
DO GEESE SEE GOD?
NEVER ODD OR EVEN
MA IS A NUN AS I AM
A DOG! A PANIC IN A PAGODA!
CIGAR? TOSS IT IN A CAN, IT IS SO TRAGIC

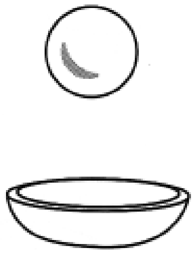
वजनाचे कोडे

मातीचा एक
गोळा घ्या.









त्यातून सारख्या वजनाचे आणि
सारख्या आकाराचे मातीचे चार गोळे बनवा.

मग चारही गोळ्यांचे वेगवेगळे आकार तयार करा–
एक प्राणी, एक ठोकळा, एक कप आणि एक बशी.

तुमच्या मित्रांना विचारा, की यातला कोणता आकार अधिक जड असेल?
प्रत्येक आकार एकसारख्या वजनाच्या गोळ्यापासून बनला असल्याने
त्याच्या वजनात फरक कसा असेल?

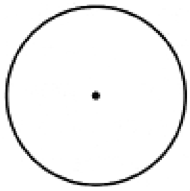
पाय (Pi) ची किंमत लक्षात ठेवण्यासाठी

तुम्हाला जर पायची किंमत लक्षात ठेवायची असेल, तर पुढे दिलेल्या इंग्रजी वाक्यातील
प्रत्येक शब्दात किती अक्षरे आहेत ते मोजा.

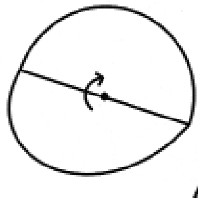
तर तुम्हाला दोन अधिकची दशांश स्थळे मिळतील. (3.141592653...)

वर्तुळाचे भाग

वर्तुळाच्या निरनिराळ्या भागांना नावे देण्याचा एक सोपा मार्ग आहे.
जाड कागदाची दोन वर्तुळे, डिंक आणि पेन घेऊन बसा.

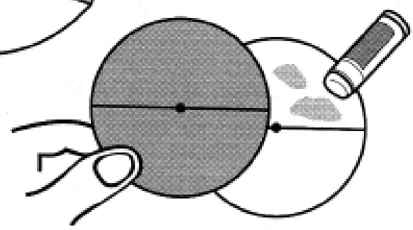


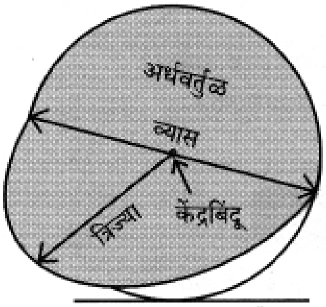
10 सेंटीमीटर
व्यासाची दोन वर्तुळे
कापून घ्या.



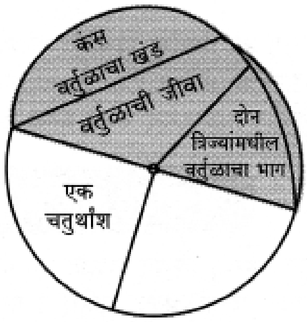
त्यांची व्यासावर
घडी करा.

दोन्ही वर्तुळांचे वरचे अर्धे भाग एकमेकांना
चिकटवा. वरच्या बाजूच्या वर्तुळाची खालची
अर्धी बाजू झाकणाप्रमाणे उघडता येईल.





वरच्या
बाजूच्या
वर्तुळावर
लिहा.



वरच्या वर्तुळाची
घडी उघडा आणि
खालच्या
वर्तुळावर लिहा.

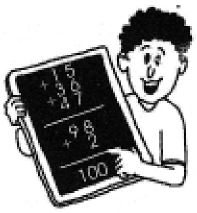
कशात अधिक मावेल?

कोड्यात टाकणारे वर्तुळ

कागदावरून पेन्सिल न उचलता तुम्हाला एखादे वर्तुळ आणि त्याचा केंद्रबिंदू काढता येईल का? हे अशक्य आहे असेच वाटते, पण तसे करणे शक्य आहे.

चित्रात दाखवल्याप्रमाणे कागदाच्या उजव्या कोपऱ्याची घडी करा. घडीच्या कोपऱ्याला केंद्रबिंदू मानून वर्तुळ पूर्ण करा.

बेरीज शंभर



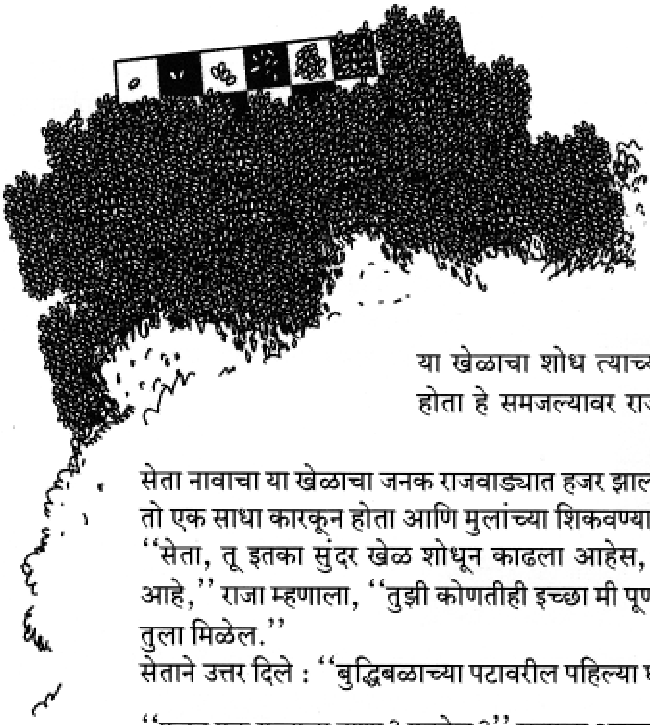
येथे 1 ते 9 हे आकडे अशा तऱ्हेने मांडले आहेत, की त्यांची बेरीज बरोबर शंभर होते. हेच आणखी एखाद्या प्रकारे करता येईल का? ही मांडणी करताना कोणत्या नियमाचा वापर करण्यात आला आहे ?

मोजणार कसे ?

तुमच्याकडे 4 लिटर आणि 7 लिटर अशी दोनच मापे आणि बादलीभर दूध आहे. गिऱ्हाइकाला दोन लिटर दूध कसे देणार?

फेब्रुवारीत किती दिवस असतात?

बुद्धिबळाच्या पटाची कहाणी



प्राचीन काळापासून खेळल्या जाणाऱ्या बुद्धिबळ या खेळाचा शोध हिंदुस्थानात लावण्यात आला. शेरम या हिंदुस्थानच्या राजाला यातील बुद्धिकौशल्याचे आणि त्यात असलेल्या अगणित शक्यतांचे फार कौतुक व आश्चर्य वाटत असे.

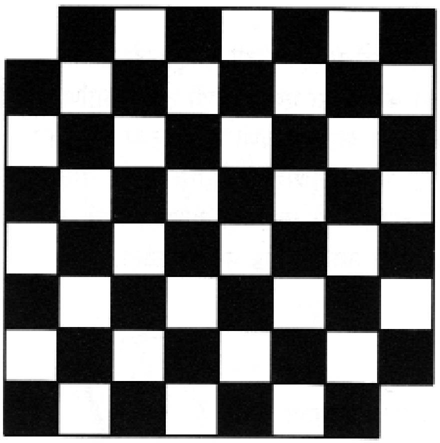
या खेळाचा शोध त्याच्या राज्यातील एका नागरिकाने लावला होता हे समजल्यावर राजाने त्याला बक्षीस देण्याचे ठरवले.

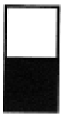
सेता नावाचा या खेळाचा जनक राजवाड्यात हजर झाला.
तो एक साधा कारकून होता आणि मुलांच्या शिकवण्या करून आपला चरितार्थ चालवत असे.
''सेता, तू इतका सुंदर खेळ शोधून काढला आहेस, त्याबद्दल मी तुला एक मोठे बक्षीस देणार आहे,'' राजा म्हणाला, ''तुझी कोणतीही इच्छा मी पूर्ण करू शकतो. तुला काय हवे ते तू सांग, ते तुला मिळेल.''
सेताने उत्तर दिले : ''बुद्धिबळाच्या पटावरील पहिल्या घरासाठी मला धान्याचा एक दाणा द्या.''

''फक्त एक गव्हाचा दाणा? एवढेच?'' राजाला अश्चर्याचा धक्काच बसला.
''हो महाराज. दुसऱ्या घरासाठी दोन दाणे द्या. तिसऱ्या घरासाठी चार, चौथ्यासाठी आठ, पाचव्यासाठी 16, सहाव्यासाठी 32....''
''बस!'' राजा वैतागून म्हणाला, ''तुझ्या इच्छेप्रमाणे पटावरील सर्व 64 घरांसाठी तुला धान्य मिळेल.''
दरबारातील गणितज्ञ हिशेब करायला बसले आणि मोठ्या मुष्कीलीने त्यांनी किती दाणे द्यावे लागतील त्याचा प्रचंड आकडा शोधून काढला,
तो होता 18,446,744,073,709,551,615.

पहिल्या घरासाठी 1, दुसऱ्यासाठी 2, तिसऱ्यासाठी 4, चौथ्यासाठी 8 वगैरे वगैरे. 63 व्या घरासाठीचा आकडा दुप्पट करून 64 व्या घरासाठी द्यावा लागेल. तो आकडा प्रचंडच होता. एका घनमीटरमध्ये 1,50,00,000 गव्हाचे दाणे मावतात हे आता माहीत आहे. म्हणजे बुद्धिबळाच्या खेळाचा शोध लावणाऱ्या सेताला मिळणारा गहू 12,000,000,000,000 घनमीटर किंवा 12,000 घन किलोमीटर इतका भरेल. धान्याचे कोठार जर 4 मीटर उंच आणि 10 मीटर रुंद असेल, तर त्याची लांबी 300,000,000 किलोमीटर असावी लागेल, म्हणजे पृथ्वीचे सूर्यापासून जे अंतर आहे त्याच्या दुप्पट!
राजादेखील असे बक्षीस देऊ शकला नाही.

गणिती पुरावा





एखादी समस्या वैज्ञानिक दृष्टिकोनाने किंवा गणिती दृष्टिकोनातून सोडवता येईल. आता आपण त्यातील फरक पाहूया.

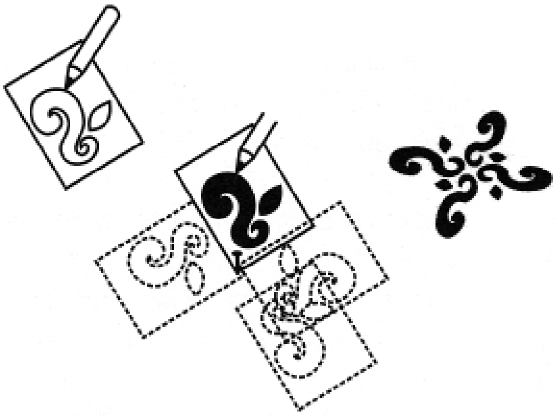
शेजारच्या बुद्धिबळाच्या पटातील विरुद्ध टोकांचे दोन चौकोन काढून टाकले आहेत. म्हणजे 64 घरांऐवजी आता 62 घरे आहेत. आपल्याकडे एक चौकट पांढरी आणि एक काळी असलेल्या 31 सोंगट्या आहेत. या पटावर या 31 सोंगट्या वापरून पटावरील सर्व 62 घरे भरता येतील का? आता याचे वैज्ञानिक आणि गणिती प्रकार पाहूया.

वैज्ञानिक पद्धत : ही समस्या सोडवण्यासाठी शास्त्रज्ञ प्रयोग करून पाहील. पटावरील सर्व घरे भरण्यासाठी 31 सोंगट्या लावण्याच्या सर्व शक्यतांचा तो प्रयोग करून पाहील आणि हे अशक्य आहे असे लवकरच त्याच्या लक्षात येईल. पण याची अचूक खात्री कशी काय देता येईल? त्याने अनेक प्रकारांनी सोंगट्या लावण्याचा प्रयत्न करूनही हे जमले नव्हते. परंतु त्याने प्रयत्न न केलेले आणखी लक्षावधी मार्ग असू शकतील. कदाचित एखादी पद्धत प्रत्यक्षात यशस्वी होईलही. कोणी सांगावे? कदाचित एक दिवस कोणाला तरी याचे योग्य उत्तर मिळेल आणि शास्त्रीय सिद्धांतच बदलेल.

गणिती पद्धत : याउलट या प्रश्नाचे उत्तर शोधण्यासाठी गणितज्ञ तर्क लढवून विचार करेल. त्यातून त्याला निश्चित स्वरूपाचे अचूक उत्तर मिळेल, ते काळ्या दगडावरील रेघ ठरेल आणि त्याला कोणीही कधीही आव्हान देऊ शकणार नाही. गणिती तर्कशास्त्राचे हे उदाहरण पाहा :

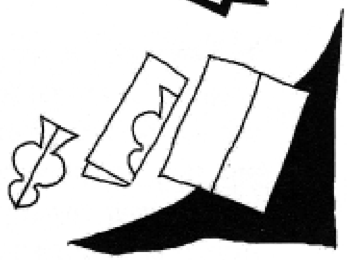
पटावरून काढून टाकण्यात आलेली दोन्ही घरे पांढरी होती, म्हणजे आता पटावर 32 काळी आणि 30 पांढरी घरे शिल्लक आहेत. प्रत्येक सोंगटीने फक्त शेजारी शेजारी असलेली दोन घरे – एक पांढरे आणि दुसरे काळे– भरता येतात. म्हणजे, कशाही पद्धतीने मांडणी केली तरी पहिल्या 30 सोंगट्यांनी 30 पांढरी व 30 काळी घरे भरता येतील. काहीही केले तरी तुमच्याकडे एक सोंगटी आणि 2 काळी घरे शिल्लक राहतील. परंतु, एका सोंगटीने एकमेकांशेजारी असणारी दोन घरेच भरता येतात आणि शेजारच्या घरांचे रंग नेहमीच एकमेकांविरुद्ध असतात. राहिलेली दोन घरे एकाच रंगाची असल्याने ती राहिलेल्या एका सोंगटीने भरता येणार नाहीत. म्हणून पट भरता येणे अशक्य आहे. या पुराव्याने हे सिद्ध होते, की कशाही तऱ्हेने, कितीही प्रयत्न केला तरी दोन घरे काढलेला पट 31 सोंगट्यांनी भरता येणार नाही.

आरशाची कोडी

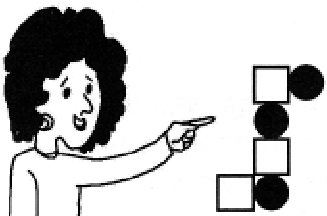


पोस्टकार्डावर एक नक्षी काढून ती कापा. एका कोपऱ्यात एक टाचणी टोचा आणि ती नक्षी ट्रेस करा. टाचणी टोचलेल्या टोकातून कार्ड एक-चतुर्थांशात फिरवा आणि परत नक्षी ट्रेस करा. असे करण्याने तुम्हाला सर्व बाजूंनी सारखीच अशी सुरेख नक्षी मिळेल.

कागदावर काहीही आकार काढा आणि त्याच्या बाजूला एक आरसा चिकटवून पहा, तुम्ही काढलेल्या आकाराचे त्यात प्रतिबिंब दिसेल.

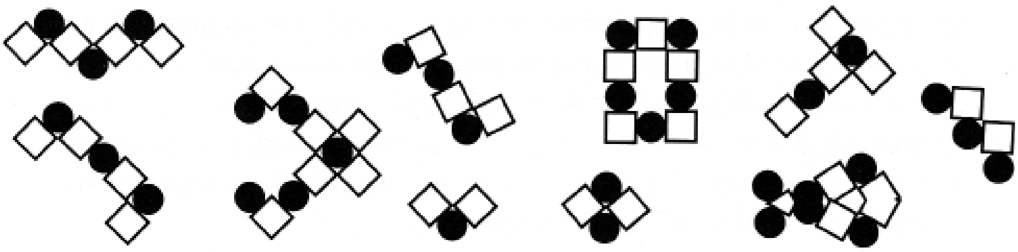


एका कागदाची अर्ध्यात घडी करा. दुमडलेल्या बाजूत कोणताही आकार कापा. कागदाची घडी उघडल्यावर दोन्ही बाजूंनी अगदी सारखाच असणारा, प्रमाणबद्ध (सिमेट्रीकल) आकार मिळेल. यातील सिमेट्रीची रेषा कोणती?

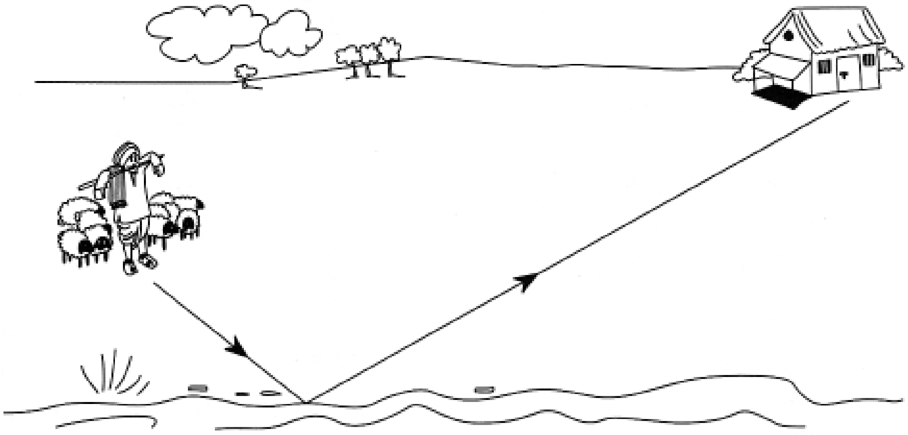


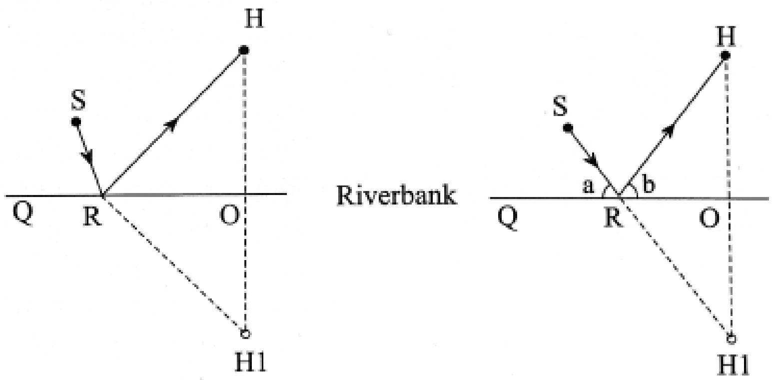
MASTER PATTERN

शेजारी मांडणीचा एक नमुना दिला आहे. आता तुमचा आरसा प्रत्येक वेळी या नमुन्याच्या वेगवेगळ्या बाजूने नमुने असे लावा, की जेणेकरून तुम्हाला खाली दिलेले नमुने मिळतील. बहुतेक सर्व तुम्हाला आरशात पाहून मिळवता येतील. पण यातले काही नमुने तुम्हाला चकवण्यासाठी मुद्दाम घातले आहेत. ते नुसते कठीणच आहेत असे नव्हे, तर ते अशक्यच आहेत! यातील कोणते नमुने अशक्य आहेत ते शोधा बरे. ही कोडी सोडवायला तुम्हाला मजा आली असेल, तर तुम्हीही अशी नवी कोडी बनवू शकाल.



सर्वात जवळचा रस्ता





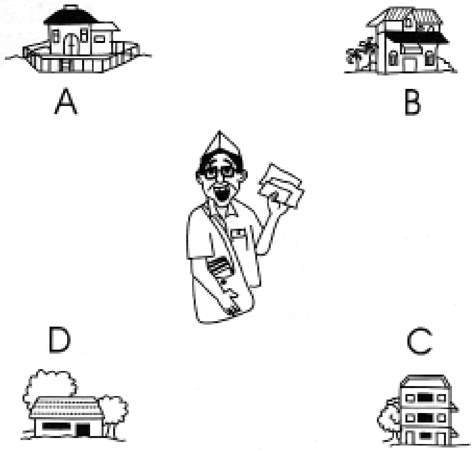
एक मेंढपाळ आपल्या मेंढ्या चरायला घेऊन गेला होता. संध्याकाळी घरी जाण्यापूर्वी त्याला त्यांना नदीवर पाणी प्यायला न्यायचे होते. त्यासाठी नदीवर जाऊन घरी जाण्यासाठी सर्वात जवळचा मार्ग कोणता असेल? दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर, नदीच्या कोणत्या बिंदूशी पाणी पिण्यासाठी गेल्यास त्याला घरी जाण्यासाठी कमीत कमी पायपीट करावी लागेल?

कमीत कमी अंतर चालावे लागावे यासाठी नदीकडे जाणारा मार्ग आणि नदीकडून घराकडे जाणारा मार्ग यांनी नदीशी होणारा कोन सारख्याच अंशाचा असावा. (कोन A = कोन B)

हा प्रश्न सोडवण्यासाठी अशी कल्पना करा, की त्याचे घर (H) नदीच्या किनाऱ्यापासून तेवढ्याच अंतरावर पण पलीकडच्या बाजूला, H1 या ठिकाणी आहे. नदीच्या R या कोणत्याही बिंदूपाशी मेंढपाळ (S) पाणी पिण्यास गेला, तरी RH व RH1 हे अंतर सारखेच असेल. मग नदीवरील R हा बिंदू कसा ठरवायचा? SR + RH1 हे अंतर कमीत कमी असेल, असा तो बिंदू असावा, म्हणजेच SR + RH हे अंतरही कमीत कमीच असेल, कारण RH व RH1 दोन्हीतील अंतर सारखेच आहे.

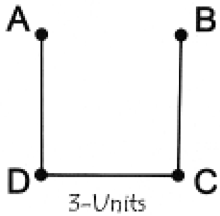
या प्रश्नाचे उत्तर अगदी सोपे आहे. नदीवरील पाणी पिण्याची जागा अशा ठिकाणी असावी, की SRH1 ही सरळ रेषा असेल.

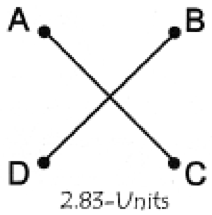
पोस्टमनच्या समस्या

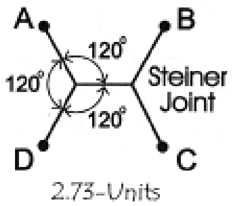


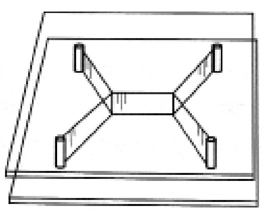
साबणाचे फुगे म्हणजे लहान मुलांचा खेळ समजला जातो. पण कधी कधी मोठी माणसेही त्यात रमून जाऊ शकतात. साबणाचे फुगे नेहमीच आपला पृष्ठभाग कमीत कमी करतात, म्हणून गणितातील गुंतागुंतीचे प्रश्न सोडवण्यासाठी त्यांची अनेकदा मदत होते.

हा एक रोजच्या आयुष्यातील प्रश्न आहे. पोस्टमनला A, B, C, D अशा चार गावांत जाऊन पत्रे वाटायची आहेत. ही गावे एका चौरसाच्या चार टोकांवर आहेत.







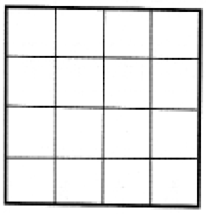


ही गावे कशा प्रकारे जोडली तर पोस्टमनला कमीत कमी अंतर कापावे लागेल? इंग्रजी U या आकाराच्या तीन रेषांनी ही चार गावे जोडता येतील म्हणजे तीन रेषांच्या एकूण लांबीइतके अंतर कापावे लागेल. आणखी काही शक्यतांचा विचार आणि काही प्रयोग करून यात सुधारणा करता येईल आणि A ते C व B ते D अशा एकमेकांना छेद देणाऱ्या रेषा म्हणजे दोन कर्ण काढल्यास प्रत्येक कर्णाची लांबी 1.41 असेल, म्हणजे दोन कर्णांची किंवा या फुलीची लांबी होईल 2.82.
यावरून असा एक विचार येतो, की एकाऐवजी एकमेकांना छेद देणारे दोन बिंदू घेतले तर अधिक फायद्याचे ठरेल. पण ते कोणत्या ठिकाणी असावेत आणि ते किती अंशांवर असावेत?

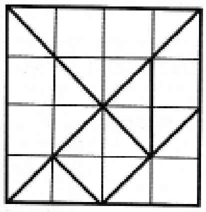
हा एक कठीण प्रश्न आहे आणि प्रयोगात्मक पद्धतीने तो सोडवायचा झाल्यास, साबणाच्या बुडबुड्यांचा वापर करणे हा एक मार्ग आहे. पर्स्पेक्स प्लास्टिकचे दोन पारदर्शक तुकडे घेऊन त्यांना एकमेकांना समांतर पद्धतीने ठेवून चौरसाच्या चार टोकांना चार टाचण्या लावा. ते साबणाच्या पाण्यात बुडवले असता साबणाचा एक थर येईल आणि दरवेळी त्याचा पृष्ठभाग कमी कमी होत जाईल. अखेर तुम्हाला पाच सरळ रेषा मिळतील आणि त्यात प्रत्येकी तीन कोन असणारे दोन छेदबिंदू मिळतील. छेदबिंदूजवळील तीनही कोन 120 अंशांचे असतील. या 120 अंशांच्या जोडांना स्टाईनर जॉइंट म्हणतात. या रस्त्याची एकूण लांबी फक्त 2.73 म्हणजे चारही गावांना जोडणारे कमीत कमी अंतर असेल. पोस्टमनच्या, सर्वात कमी अंतर जाऊन चारही गावांना पोहोचण्याच्या प्रश्नाचेही हेच उत्तर आहे.

टॅनग्रॅम

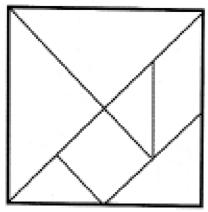
टॅनग्रॅम हे 1000 वर्षांपूर्वीचे एक चिनी कोडे आहे.
यात एका चौरसाचे सात तुकडे केले जातात.



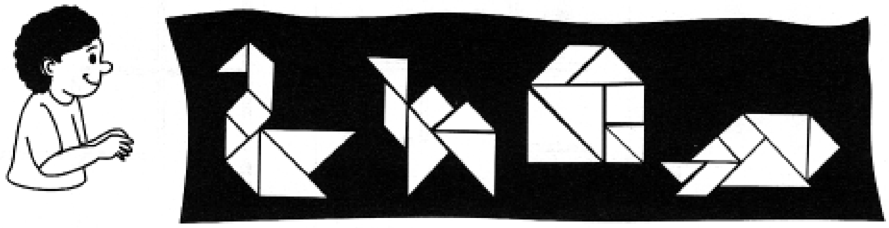
1. एका जाड कागदावर एक चौरस काढून त्यात 16 लहान चौरस होतील अशा रेषा मारा.



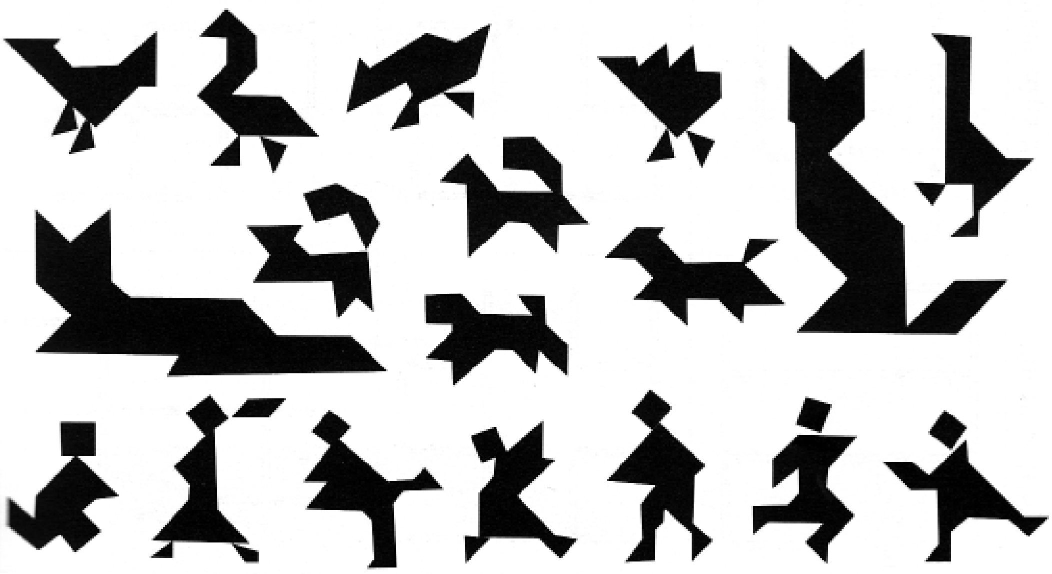
2. चित्रात दाखवल्याप्रमाणे रेषा काढा.



3. या रेषांवर कापून तुम्हाला सात तुकडे मिळतील.

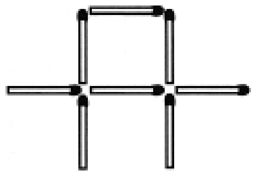
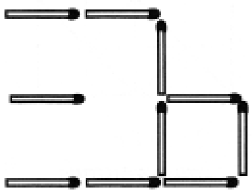
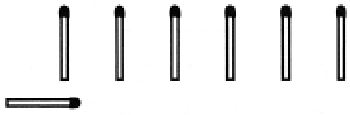
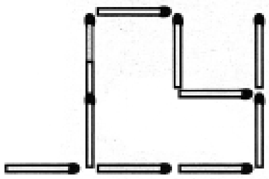
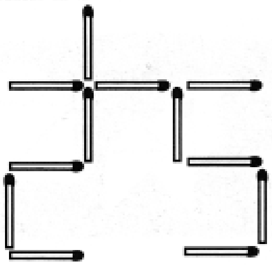
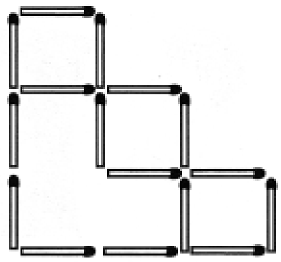
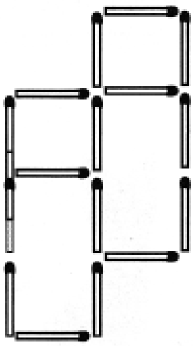
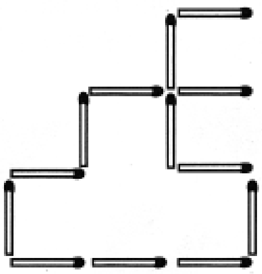
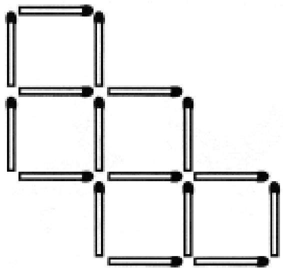
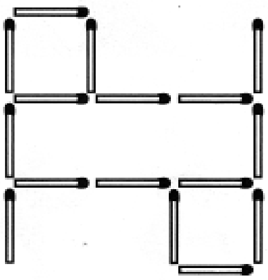
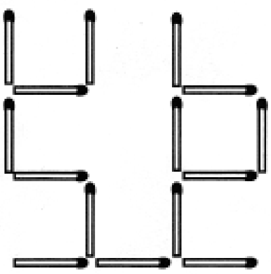
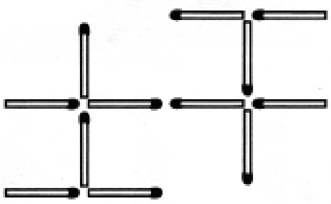


हे सात तुकडे निरनिराळ्या पद्धतीने एकमेकांना जोडून तुम्हाला अनेक नमुने बनवता येतील. भूमितीतील आकार, माणसे, पक्षी, प्राणी वगैरे. प्रत्येक मांडणीमध्ये सातही तुकडे वापरले पाहिजेत एवढी एकच अट आहे. यातून हजारो चित्रे बनवता येतात.

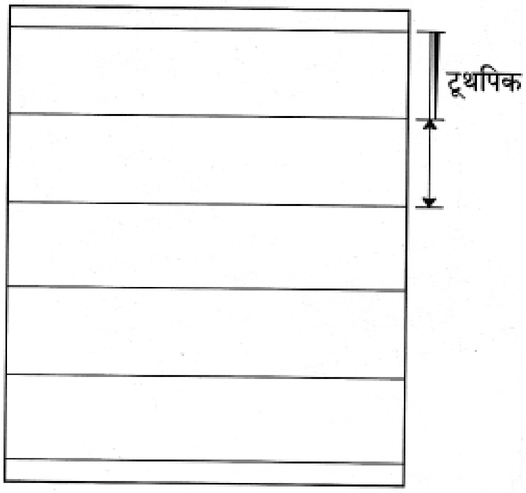


आगपेटीतील काड्यांचे कोडे

जेवढ्या काड्या हलवायला सांगितल्या आहेत तेवढ्याच हलवून, सांगितले आहेत तेवढेच चौरस बनवा.
(चौरस एकमेकांवर आलेले चालतील, किंवा त्यांच्या बाजू सामाईक असलेल्या चालतील.)

	दोन काड्या हलवा	तीन काड्या हलवा	चार काड्या हलवा
दोन चौरस बनवा			
तीन चौरस बनवा			
चार चौरस बनवा			
पाच चौरस बनवा			

पायची किंमत



टूथपिक्स खाली टाकून तुम्हाला पायची किंमत अचूकपणे शोधून काढता येईल! काउंट ब्युफॉन यांनी हा मजेशीर प्रयोग करून पाहिला. आता 300 वर्षांनंतरही तुम्ही तो करून पाहू शकता. एका कागदावर समांतर रेषा काढा. या रेषांमध्ये एका टूथपिकइतके अंतर असायला हवे. टूथपिकची कामगिरी या प्रयोगात फारच महत्त्वाची आहे. टूथपिक खुर्चीच्या कडेवर ठेवा आणि चित्रात दाखवल्याप्रमाणे ती रेषांच्या कागदावर पडू द्या.

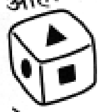
टूथपिक एखाद्या रेषेला किती वेळा स्पर्श करते याची नोंद करा. त्याचप्रमाणे टूथपिक जेव्हा कोणत्याही रेषेला स्पर्श करत नाही त्याचीही नोंद करा. काउंट ब्युफॉनना असे आढळले की जर अनेक वेळा टूथपिक खाली पाडण्याचा प्रयोग केला, तर या दोन शक्यतांमध्ये एक विशिष्ट नाते असलेले दिसून येते.

टूथपिक रेषेला स्पर्श करण्याची शक्यता 2/3.14 किंवा 2/(पाय) अशी असते. वर्तुळाचा परीघ हा व्यास गुणिले पाय असतो हे आपल्याला माहीतच आहे. पाय हा स्थिर क्रमांक वर्तुळाशी संबंधित मानला जातो. टूथपिक खाली टाकण्याच्या प्रयोगातून पायची किंमत मिळवणे विचित्रच नाही का?

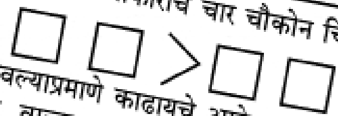
लाझेरिनी नावाच्या इटालियन गणितज्ञाने टूथपिक 3408 वेळा खाली पाडली.
त्याला मिळालेली पायची किंमत होती 3.1415929...
यात चूक होती केवळ 0.0000003 इतकी!

फाशांचे मजेशीर खेळ

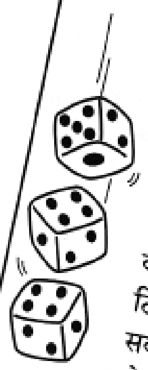
एका फाशावर सहा निरनिराळे आकार काढा. त्या प्रत्येक आकाराचे पुठ्ठ्याचे प्रत्येकी दहा तुकडे कापून एका पिशवीत ठेवा. फासा टाका आणि त्याच्या वरच्या बाजूला जो आकार असेल, त्या आकाराचा तुकडा तुम्ही पिशवीतून केवळ स्पर्शाच्या साहाय्याने शोधायचा आहे. जर तो बरोबर असेल, तर तो तुम्हाला मिळेल. हा खेळ आळीपाळीने खेळायचा आहे.



प्रत्येकाने या आकाराचे चार चौकोन चित्रात

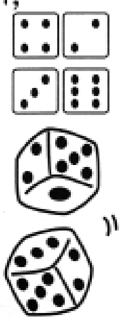


दाखवल्याप्रमाणे काढायचे आहेत. आता फासा टाका. वरच्या बाजूला आलेला क्रमांक कोणत्याही एका चौकोनात लिहा. एकदा लिहिलेल्या आकड्याची जागा बदलता येणार नाही. सर्व चौकोनात आकडे येईपर्यंत फासा टाकत राहा. डावीकडचे आकडे उजवीकडच्या आकड्यांपेक्षा मोठे आहेत का? तसे असतील तर तुम्हाला एक गुण मिळाला. ज्याला सर्वप्रथम पाच गुण मिळतील तो जिंकेल.



या खेळासाठी तुम्हाला तीन फासे आणि तुमचे गुण मांडून ठेवण्यासाठी कागद-पेन्सिल घ्यावी लागेल. तिन्ही फासे एकदम टाका. तिन्ही फाशांच्या वरच्या बाजूला असलेल्या ठिपक्यांची बेरीज करा. ज्याचे सर्वप्रथम 100 गुण होतील, तो जिंकेल.

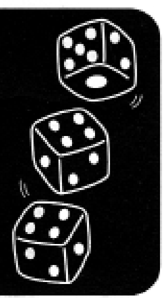
प्रत्येक खेळाडू दोन फासे दोनदा टाकेल. प्रत्येक वेळी वरच्या बाजूचे ठिपके मोजून आधी त्यांची बेरीज व मग त्या दोघांचा गुणाकार करेल. उत्तर बरोबर आले, तर एक गुण.
उदाहरणार्थ, **6 × 9 = 54.**



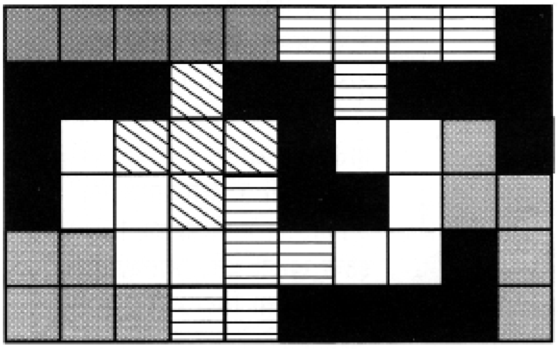
प्रत्येक राउंडनंतर ज्यांचे गुण सर्वाधिक असतील त्याला एक गुण मिळेल. ज्याचे 10 गुण सर्वप्रथम होतील, तो जिंकेल.

फरक

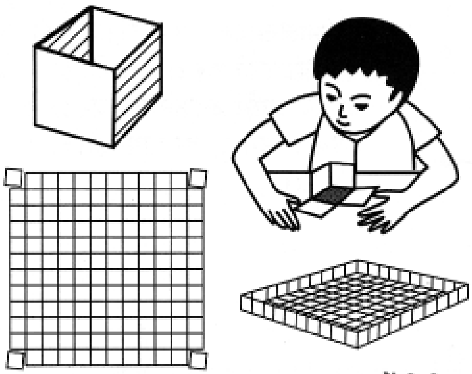
तीन फासे घेऊन खेळताना मुले त्याचे नियम बदलून अथवा नवे नियम बनवूनही खेळू शकतील. तीन फासे एकदमच फेकल्यानंतर दोन मोठ्या आकड्यांची बेरीज करून त्यातून तिसऱ्या फाशावरील आकडा वजाही करू शकतील. ते त्यांचे गुण असेही म्हणता येईल. ज्याचे प्रथम 100 गुण होतील तो जिंकेल.



सर्वात मोठा डबा



दरवेळी पाच चौरस वापरून निराळी मांडणी करा. पाच चौरस वापरून अशा फक्त 12 च मांडण्या (पेंटॅमिनोज) करता येतात. या चित्रात ते तुकडे जोडून 10 × 6 या आकाराचे एक जिगसॉ कोडे बनवले आहे. ते पुठ्ठ्यावर कापून घ्या. 10 × 6, 12 × 5, 15 4 आणि 20 × 3 या आकारांचे निरनिराळे आयत बनवा. यात हजारो शक्यता आहेत, परंतु प्रत्येक आयतासाठी एकेक उत्तर तरी मिळवायचा प्रयत्न करा.

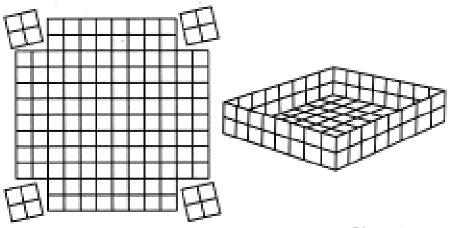


10 × 10 × 1 = आकारमान 100 घनसेंटीमीटर.

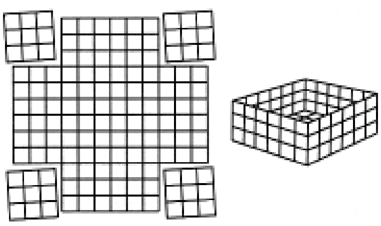
गणितात बऱ्याच वेळा आपल्याला सर्वात मोठे किंवा सर्वात लहान शोधण्याचा प्रश्न असतो.

उदाहरणार्थ, 12 सेंमी × 12 सेंमी या मापाचा मोठा जाड कागद घेऊन त्यापासून सर्वात जास्त पाणी मावणारा डबा कसा बनवता येईल?

हे मोठे आव्हानात्मक तसेच आवडीचे काम आहे, कारण याची काही उत्तरे फारच सुबक आणि समाधानकारक असतात. लांबी, रुंदी आणि उंचीच्या प्रमाणातील काही शक्यता खाली दिल्या आहेत.



8 × 8 × 2= आकारमान 128 घनसेंटीमीटर.



6 × 6 × 3 = आकारमान 108 घनसेंटीमीटर.

आकारमान = लांबी × रुंदी × उंची

लांबी 12 × रुंदी 12 × उंची 0 = आकारमान 0 घनसेंटीमीटर.

लांबी 10 × रुंदी 10 × उंची 1 = आकारमान 100 घनसेंटीमीटर

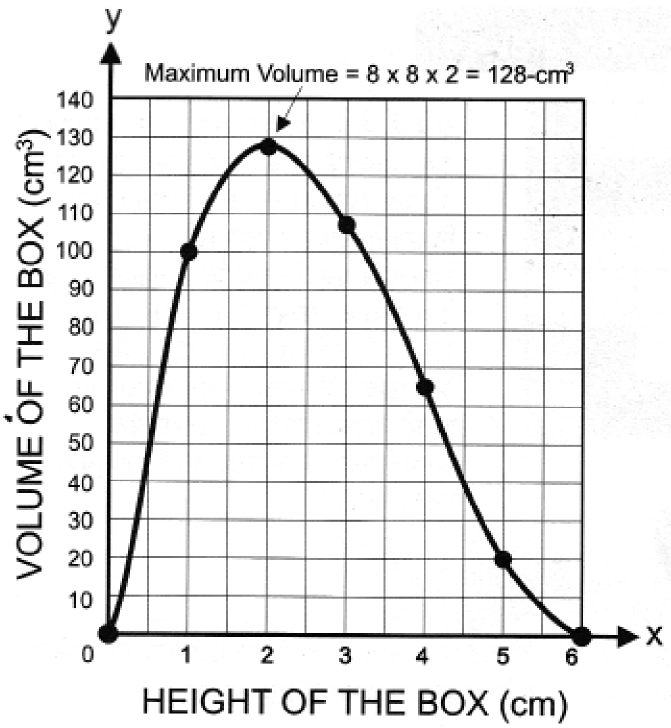
लांबी 8 × रुंदी 8 × उंची 2 = आकारमान 128 घनसेंटीमीटर

लांबी 6 × रुंदी 6 × उंची 3 = आकारमान 108 घनसेंटीमीटर

लांबी 4 × रुंदी 4 × उंची 4 = आकारमान 64 घनसेंटीमीटर

लांबी 2 × रुंदी 2 × उंची 5 = आकारमान 20 घनसेंटीमीटर

लांबी 0 × रुंदी 0 × उंची 6 = आकारमान 0 घनसेंटीमीटर



या प्रयोगावरून डिफरन्शियल कॅलक्युलस समजून घ्यायला मोठीच मदत होते. उंची जेव्हा 1 सेंमी असते, तेव्हा आकारमान असते 100 सीसी (घनसेंटीमीटर). उंची 2 सेंमी झाली की आकारमान होते 128 सीसी, ते सर्वात अधिक आहे. उंची 3 सेंमी झाली की आकारमान कमी होऊन 108 सीसी इतके खाली येते. आलेखातील सर्वात वरचा बिंदू उंची 2 सेंमी असताना येतो.

या आलेखावरून असे दिसते, की डब्याची उंची जर a ने दर्शवली असेल आणि आकारमान जर b ने दर्शवले असेल, तर पाया होईल $12-2a$.

या डब्याचे आकारमान खालील सूत्राचा वापर करून काढता येईल :

आकारमान = लांबी × रुंदी × उंची
$= (12-2a) \times (12-2a) \times a$
$= (144 - 24a - 24a + 4a^2) \times$ अ
$= (144a - 48a^2 + 4a^3)$

या डिफरन्सिएशन (dy/dx) वरून उतार (ग्रेडियंट) मिळतो

$$dy/dx = 144 - 96a + 12a^2$$

आलेखावरील सर्वाधिक उतार व कमीत कमी वळणबिंदूही शून्यापाशी असेल. यावेळी $dy/dx = 0$ असेल व सर्वाधिक आणि सर्वात कमी आकारमान मिळेल.

$$144 - 96a + 12a^2 = 0$$

हे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते $a = 6$ आणि $a = 2$.

म्हणून सर्वाधिक आकारमान 128 सीसी असण्यासाठी डब्याची लांबी व रुंदी 8 सेंमी आणि उंची 2 सेंमी असावी लागेल.

वाढदिवस

कोणाचा तरी वाढदिवस साजरा करत असताना, तुमचीच जन्मतारीख असणारे आणखी कोणीतरी तुम्हाला भेटण्याची बरीच शक्यता आहे.

सहसा कोणाला सुचणार नाही असाच हा प्रश्न आहे. हॉकीचे दोन संघ आणि एक पंच एका ठिकाणी जमले आहेत अशी कल्पना करा. ते एकूण 23 जण असतील. या 23 लोकांपैकी दोन जणांची जन्मतारीख एकच असण्याची शक्यता कितपत असेल?

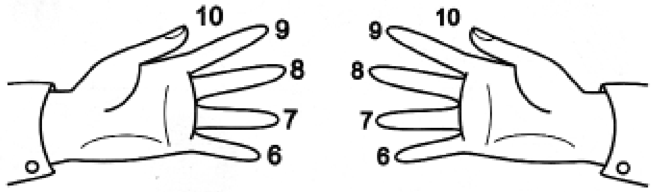
फक्त 23 व्यक्ती आणि वर्षाचे 365 दिवस असताना त्यातील दोन लोकांची जन्मतारीख एकच असेल हे जवळजवळ अशक्यच वाटते. याची शक्यता फार तर 10% असेल, असेच बहुतेकांना वाटेल. परंतु याचे खरे उत्तर आहे, 50% हून थोडेसे अधिक. याचाच अर्थ, हॉकीच्या मैदानातील दोन जणांचा वाढदिवस एकच असण्याची शक्यता आहे.

एकच वाढदिवस शोधण्यासाठी आपण एकेका व्यक्तीचा विचार न करता त्यांच्या जोड्यांचा विचार करायला हवा. आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे, 23 लोकांच्या 253 जोड्या होतात. उदाहरणार्थ, पहिल्या व्यक्तीची राहिलेल्या 22 लोकांपैकी कोणाशीही जोडी बनू शकते. म्हणजे या 22 जोड्या बनल्या. दुसऱ्या व्यक्तीची राहिलेल्या 21 जणांशी जोडी बनू शकते, त्यातून आणखी 21 जोड्या मिळतील. तिसऱ्या व्यक्तीची राहिलेल्या 20 जणांशी जोडी होऊ शकते, म्हणजे त्या आणखी 20 जोड्या होतील. या सर्वांची बेरीज केली तर आपल्याला 253 जोड्या मिळतात.

साधा विचार केला, तर 23 जणांच्या एखाद्या गटात दोघांचा वाढदिवस एकच असण्याची शक्यता आपल्याला फारच कमी वाटते, पण गणिताच्या दृष्टीने विचार केला, तर हे तितकेसे अशक्य नाही. सट्टा लावणारे आणि जुगार खेळणारे अशाच विचित्र शक्यतांचा विचार करून भाबड्या लोकांचा फायदा उठवतात. 23 लोकांच्या गटात दोघांचा वाढदिवस एकच असण्याची शक्यता 50% हून थोडीशीच अधिक आहे हे लक्षात घ्या. पण गट जसा मोठा होईल, तशी ही शक्यता खूपच वाढेल हेही लक्षात ठेवा. म्हणून एखाद्या पार्टीत 30 लोक असतील तर त्यातील दोघांचा वाढदिवस एकच असण्याची शक्यता खूपच आहे!

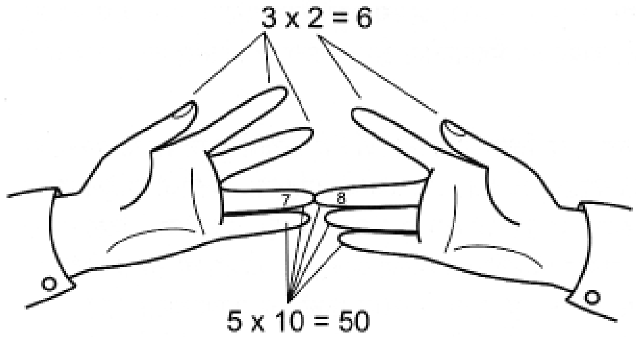
बोटांवरचा गुणाकार

गुणाकार करण्याची ही सोपी पद्धत रशियन क्रांतीपूर्वी रशियात वापरली जात असे. त्याकाळी लोक गरीब होते आणि मुलांना शाळेत पाठवणे त्यांना परवडत नसे. 6 ते 10 या आकड्यांचे गुणाकार करण्याचा हा एक सोपा मार्ग आहे.



चित्रात दाखवल्याप्रमाणे तुमच्या बोटांना 6 ते 10 असे क्रमांक द्या.

जर तुम्हाला 7 ला 8 ने गुणायचे असेल, तर एका हातावरच्या 7 क्रमांकाने दुसऱ्या हातावरील 8 क्रमांकाच्या बोटाला स्पर्श करा. आता ही दोन बोटे आणि त्यांच्या खाली असलेली सर्व बोटे 10 ची आहेत असे माना. पाच बोटे दहाची, म्हणजे ते झाले 50. आता डाव्या हातावरील राहिलेल्या बोटांना उजव्या हाताच्या राहिलेल्या बोटांनी गुणा. $3 \times 2 = 6$. आता 50 आणि 6 ची बेरीज करा, त्याचे उत्तर आले 56. यापद्धतीने नेहमीच बरोबर उत्तर मिळते.



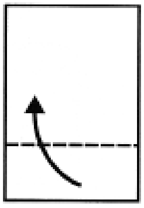
7 x 8 = 50 + 6 = 56

FRAC / TION   E^x PONENT   GRAPH

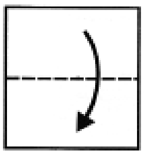
PENTAGON   DIVIDE   PYRAMID

छिद्रांची नक्षी

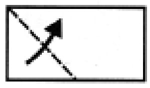
एका कागदाची घडी घालून त्याला छिद्र पाडण्याच्या यंत्राने (पेपर पंच) फक्त एकच छिद्र पाडले. कागद उघडल्यावर चित्रात दिसते आहे तसे दिसण्यासाठी त्याला कशा प्रकारच्या घड्या घातल्या असतील ?



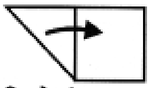
1. कागदाच्या खालच्या बाजूची वरच्या टोकाकडे एक-तृतीयांशात घडी घाला.



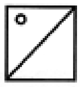
2. वरच्या बाजूच्या कागदाची एक-तृतीयांश घडी खालच्या बाजूवर घाला.



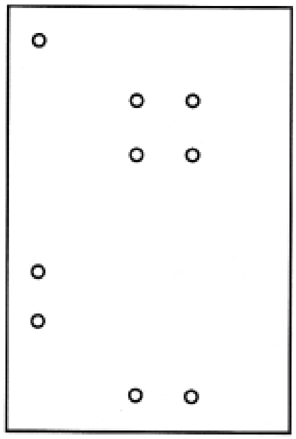
3. खालच्या टोकाची त्रिकोणी घडी घाला.



4. त्रिकोणी भाग परत उजवीकडे दुमडा.



5. चित्रात दाखवल्याप्रमाणे एक छिद्र पाडा.

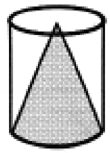


6. कागद उलगडल्यावर असा दिसेल.

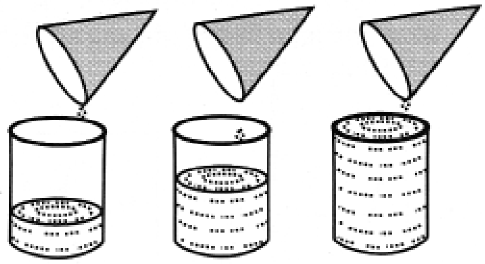
गणिती चित्रकला

दंडगोल- शंकूचे आकारमान

1. एका वर्तुळाचा 5 सेंटीमीटर त्रिज्येचा आणि 108 अंशाचा एक खंड कापून घ्या. त्याचा एक शंकू बनवा आणि त्याला टेप लावून चिकटवा.

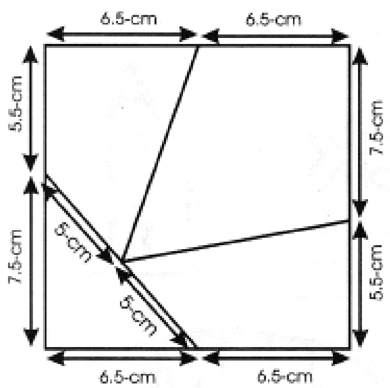


2. फोटोच्या फिल्मच्या डबीत हा शंकू व्यवस्थित फिट बसेल.

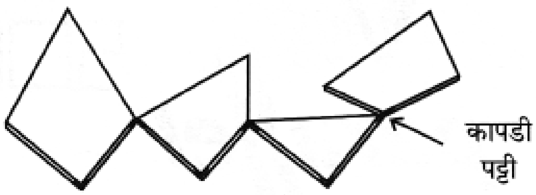


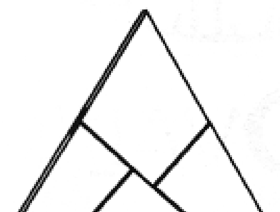
3. शंकू आणि दंडगोल या दोघांचाही पाया आणि उंची एकच असेल. दंडगोलाचे आकारमान हे शंकूच्या आकारमानाच्या तिप्पट असेल. शंकूत पाणी भरून ते फिल्मच्या डबीत ओतून याची खात्री करून घ्या.

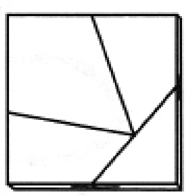
चौरस ते त्रिकोण



शेजारच्या चित्रात 13 सेंमी. बाजू असणाऱ्या चपलेच्या रबरी सोलच्या एका चौरसाचे चार तुकडे केलेले दाखवले आहेत. सर्व तुकडे एका लहानशा कापडाच्या पट्टीने रबराला चिकटेल अशा डिंकाने एकमेकांना डकवलेले आहेत.





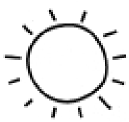


या तुकड्यांची मांडणी बदलून त्याचा सहजपणे समभुज त्रिकोण किंवा चौरस बनवता येतो.

डडनी या कोडी तयार करणाऱ्या महान ब्रिटिश तज्ज्ञाकडे अशा प्रकारचे एक टेबल होते असे म्हणतात. त्याच्याकडे जर दोन पाहुणे आले, (आणि तो तिसरा) तर तो त्रिकोणी टेबल लावत असे आणि जर तीन पाहुणे आले, तर त्याचा एक चौरस बनवत असे म्हणजे चौघांना त्याभोवती बसता येई.

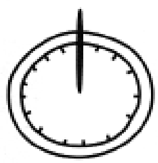
पृथ्वीचा परीघ

2,200 वर्षांपूर्वी एरॅटोस्थेनिस या महान ग्रीक गणितज्ञाने आपले वर्तुळ, त्रिकोण वगैरेंचे ज्ञान वापरून पृथ्वीच्या परीघाविषयी अंदाज वर्तवला. ते त्यांनी कसे केले ते पाहूया.



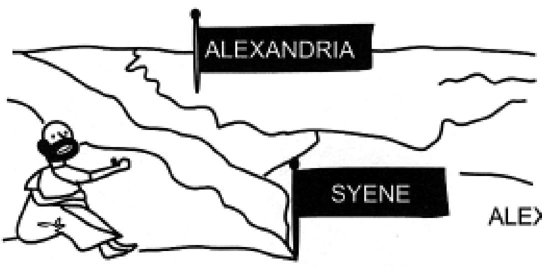
एरॅटोस्थेनिस इजिप्तमध्ये राहत असत. सूर्यामुळे पडणाऱ्या सावल्यांची त्यांनी मोजमापे घेतली.

दक्षिण इजिप्तमधील सियेन या गावी उन्हाळ्यातील एका विशिष्ट दिवशी बरोबर बारा वाजता सन-डायलवर (सूर्याच्या सावलीवरून वेळ दाखवणारे घड्याळ) सावली पडली नाही.

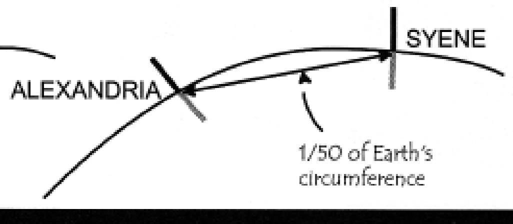


परंतु नेमक्या त्याच वेळी अलेक्झांड्रिया या गावी तेथील सन-डायलवर लहानशी सावली पडली.

त्याकाळी अंतर मोजण्यासाठी स्टॅडिया (1 स्टॅडिया = 0.15 किमी) या परिमाणाचा वापर केला जात असे. अलेक्झांड्रिया आणि सियेनमधले अंतर होते सुमारे 756 किलोमीटर.



पृथ्वीचा आकार सामान्यत: वर्तुळाकार असल्याने, दोन गावांतील अंतराचा कंस एकूण 360 अंशांपैकी 7 अंशांचा म्हणजे सुमारे 1/50 इतका होता. म्हणजेच या दोन गावांतील अंतर हे पृथ्वीच्या परिघाच्या 1/50 इतके होते.



एरॅटोस्थेनिसने केलेल्या अंदाजाप्रमाणे पृथ्वीचा परीघ 37,800 किलोमीटर होता. आधुनिक मापनानुसार तो 40,075 किलोमीटर मानतात. म्हणजे एरॅटोस्थेनिसने केलेला अंदाज पुष्कळच चांगला होता. या युक्तीवरून आपल्या लक्षात येईल, की पृथ्वीचा परीघ मोजण्यासाठी पृथ्वीप्रदक्षिणा करण्याची गरज नाही. सावलीसारख्या मामुली गोष्टींचा वापर करूनही महान निष्कर्ष काढता येतात!

शिकायची आणि शिकवायची आवड असणाऱ्या प्रत्येकासाठी तसेच मुलांचे कौशल्य वाढविणारी
मनोविकास प्रकाशनची पुस्तकं

100 चौरसांचे
अनेक उपयोग

अनुवाद : नागेश शंकर मोने

किंमत : ₹ 150

खेळ विज्ञानाचे

अरविंद गुप्ता

किंमत : ₹ 190

आपले विश्व

आनंद घैसास

किंमत : ₹ 150

Hands on
करून पहा

अनुवाद : प्रभाकर नानावटी

किंमत : ₹ 120

आपली सूर्यमाला

आनंद घैसास

किंमत : ₹ 150

युवा विज्ञान कुतूहल
(भाग 1, 2, 3)

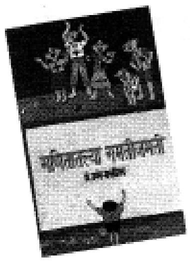
आनंद घैसास

किंमत : प्र. ₹ 80

खेळ खेळू विज्ञानाचे
(भाग 1, 2, 3)

आनंद घैसास

किंमत : प्र. ₹ 60



गणितातल्या
गमतीजमती

डॉ. जयंत नारळीकर

किंमत : ₹ 50

शिकायची आणि शिकवायची आवड असणाऱ्या
प्रत्येकासाठी तसेच मुलांचे कौशल्य वाढविणारी
मनोविकास प्रकाशनची पुस्तकं

टाकाऊतून शिकाऊ

अरविंद गुप्ता
अनु. अ. पां. देशपांडे

किंमत : ₹ 60

स्टोरी ऑफ फिजिक्स

अनु. : नंदू फडके

किंमत : ₹ 60

खेळण्यांचा खजिना

अरविंद गुप्ता

किंमत : ₹ 40

काडेपेटी व इतर विज्ञान खेळणी

अरविंद गुप्ता
अनु. अ. पां. देशपांडे

किंमत : ₹ 40

निर्मितीचं आकाश

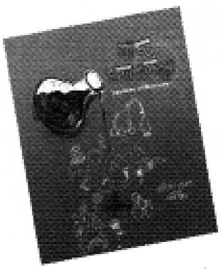
तिसरी ते आठवीच्या
विद्यार्थ्यांसाठी भाषिक प्रकल्प
रेणू दांडेकर

किंमत : ₹ 60

एका समृद्ध शाळेचा प्रवास

(संपूर्ण रंगीत)
अनु. : विनीता गनबोटे

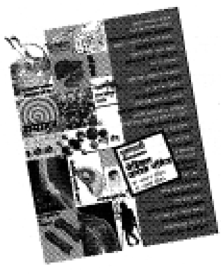
किंमत : ₹ 400



गोष्ट रसायनांची

अनु. : रुपेश गुरव

किंमत : ₹ 120



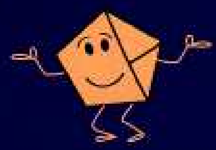
मुलांसाठी मेडिकल जनरल नॉलेज

(भाग 1 ते 5)
(सचित्र 500 प्रश्न आणि उत्तरे)
डॉ. जगन्नाथ दीक्षित

किंमत : प्र. ₹ 70

अशी एक म्हण आहे की, **‘कौशल्ये शिकवता येतात, पण संकल्पना मात्र स्वत:च समजून घ्याव्या लागतात.’**

शालेय पुस्तकात दिलेली अनेक उदाहरणे यांत्रिकपणे सोडवून मुलांना संकल्पना समजत नाहीत. त्याऐवजी बुद्धीला चालना देणाऱ्या समस्या, गमतीची कोडी यांसारख्या उपक्रमांतून त्यांचा गणिताचा अभ्यास अधिक चांगला होतो. समस्या सोडविताना त्यांना स्वत: विचार करावा लागतो व त्यातून ते गणित शिकतात. या पुस्तकात गणितज्ज्ञांच्या आयुष्यातील अनेक प्रेरणादायी गोष्टी तर आहेतच शिवाय त्यांनी स्वत: करून पाहण्यासारखे विविध प्रकारचे उपक्रम आहेत, ज्यांच्यामुळे त्यांची गणिताची समज पक्की होईल.



अरविंद गुप्ता

- 1975 साली कानपूरच्या इंडियन इन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नॉलॉजी (आयआयटी) मधून विद्युत अभियांत्रिकीची पदवी.
- विज्ञानविषयक उपक्रमांचे दूरदर्शनवर 125 कार्यक्रम प्रसारित.
- "Matchstick Models & Other Science Experiments" ह्या पहिल्या पुस्तकाचे 12 भारतीय भाषांत अनुवाद आणि या पुस्तकांची 5 लाखांहून अधिक प्रतींची विक्री.

पुरस्कार : • 1988 : मुलांमध्ये विज्ञान लोकप्रिय करण्यासाठीचा पहिला राष्ट्रीय पुरस्कार. • 2000 : कानपूरच्या आयआयटीचे सन्माननीय माजी विद्यार्थी. • 2008 : विज्ञान लोकप्रिय करण्यासाठीचा ‘इंदिरा गांधी पुरस्कार.’ • 2010 : मुलांना विज्ञानाची गोडी लागावी यासाठीचा ‘थर्ड वर्ल्ड ॲकॅडमी ऑफ सायन्स’ पुरस्कार.

- arvindguptatoys.com या संकेतस्थळावर अनेक दर्जेदार पुस्तके, विज्ञानखेळणी बनवण्यासाठी मार्गदर्शन करणारे हजारो फोटोज व शेकडो फिल्म्स उपलब्ध.
- पुणे विद्यापीठातील ‘आयुका’त मुलांसाठी असलेल्या विज्ञान केंद्रात 2003 पासून कार्यरत.

मनोविकास प्रकाशन

मूल्य : ₹ 80 । शैक्षणिक
ISBN : 9789383850372
www.manovikasprakashan.com